Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Simon Müller
WS 2016-2017

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Algebra B3

Blatt 8

Aufgabe 1
(5 Punkte)
Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p > 0$.

a) Sei $f \in K[X]$ so, dass $Df = 0$. Zeigen Sie, dass es ein $g \in K[X]$ gibt, so dass $f(X) = g(X^p)$.

b) Sei $f \in K[X]$ irreduzibel. Zeigen Sie, dass es ein $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und ein irreduzibles separabeles $g \in K[X]$ gibt, so dass $f(X) = g(X^{p^k})$.

Aufgabe 2
(5 Punkte)
Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p > 0$.

a) Sei L/K eine Erweiterung und $\alpha \in L$. Zeigen Sie: aus $\alpha \notin K$ und $\alpha^p \in K$ folgt $\alpha^n \notin K$ für alle $n \in \{1, \ldots, p-1\}$.

b) Wir nehmen an, dass $K \neq K^p$. Zeigen Sie, dass es ein irreduzibles und inseparables Polynom in $K[X]$ gibt.

Aufgabe 3
(5 Punkte)
Sei G eine Gruppe und $x \in G$.

a) Zeigen Sie, dass:

   i) $|x| = \infty$ impliziert $|x^j| = \infty$ für alle $j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.
   ii) $|x| = n < \infty$ impliziert $|x^j| = \frac{n}{ggT(n,j)}$ für alle $j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.
   iii) $|x| = n < \infty$ und $j \mid n$ impliziert $|x^j| = \frac{n}{j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

b) Angenommen, dass $|x| = \infty$. Zeigen Sie, dass x^j genau dann $< x >$ erzeugt, wenn $j \in \{-1, 1\}$.

Aufgabe 4
(5 Punkte)

a) Bestimmen Sie, ob folgende Gruppen zyklisch sind:

   i) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$
   ii) $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$
   iii) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b) Sei G eine Gruppe und $x, y \in G$ kommutierend, d.h $xy = yx$. Zeigen Sie, dass $|xy| \mid kgV(|x|, |y|)$. Gilt immer $|xy| = kgV(|x|, |y|)$?

c) Geben Sie ein Gegenbeispiel zur Aussage b) in dem Fall, dass x und y nicht kommutieren.

Zusatzaufgabe für Interessierte
(2 Punkte)
Sei G eine abelsche Gruppe der Ordnung pq, wobei p, q zwei verschiedene Primzahlen sind. Zeigen Sie, dass G zyklisch ist.

Abgabe: Freitag, 23. Dezember 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.