Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Simon Müller
WS 2016-2017

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Algebra B3

Blatt 9

G ist überall eine Gruppe. Falls A eine Teilmenge von G ist, bezeichnet $< A >$ die von A erzeugte Untergruppe.

Erinnerung: Eine *partielgeordnete Menge* ist eine Menge mit einer Halbordnung, d.h. einer zweistelligen Relation, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
Sei $(A, \leq)$ eine partielgeordnete Menge und $a, b \in A$. Das *Supremum* (bzw. das *Infimum*) des Paares (a, b) ist das kleinste (bzw. das grösste) Element $c \in A$, so dass $a \leq c$ und $b \leq c$ (bzw. $c \leq a$ und $c \leq b$).
Ein *Verband* ist eine partielgeordnete Menge $(A, \leq)$, so dass alle Paare von Elementen von A ein Infimum und ein Supremum besitzt.

Aufgabe 1
(5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass A_4 keine Untergruppe der Ordnung 6 besitzt.

   Hinweis: Bemerken Sie, dass solch eine Gruppe einen 3*-Zykel enthalten würde.*

b) Finden Sie alle Untergruppen von A_4. Welche davon sind normal?

Aufgabe 2
(4 Punkte)

a) Sei $H \leq G$ eine Untergruppe von G mit Index 2. Zeigen Sie, dass H normal in G ist.

b) Finden Sie ein Gegenbeispiel, wenn $[G : H] = 3$.

Aufgabe 3
(6 Punkte)

a) Seien K, H Untergruppen von G. Zeigen Sie: Falls $KH = HK$, so gilt $KH =< K \cup H >$.

b) Sei $G = S_3$. Finden Sie $H, K \leq G$, so dass $HK \neq KH$.

c) Zeigen Sie, dass die Menge aller Untergruppen von G geordnet durch Inklusion ein Verband ist.

Aufgabe 4
(5 Punkte)
Sei $N \lhd G$ eine normale Untergruppe von G. Sei $\phi : G \to G/N$ der kanonische Homomorphismus. Falls $A \leq G$ und $N \leq A$, so schreiben wir $\overline{A} := A/N$.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung ϕ^* definiert durch

$$\phi^* : A \mapsto \phi(A) = \overline{A}$$

eine bijektive Abbildung von der Menge der Untergruppen von G die N enthalten in die Menge der Untergruppen von G/N ist.

b) Sei $N \leq A, B$. Zeigen Sie den „Satz des Verband-Isomorphismus", das heißt:

(i) $A \leq B$ genau dann, wenn $\overline{A} \leq \overline{B}$; und in diesem Fall ist $[B : A] = [\overline{B} : \overline{A}]$

(ii) $A \lhd B$ genau dann, wenn $\overline{A} \lhd \overline{B}$; und in diesem Fall ist $B/A \cong \overline{B}/\overline{A}$

(iii) $\overline{\langle A \cup B \rangle} = \langle \overline{A} \cup \overline{B} \rangle$

(iv) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Zusatzaufgabe für Interessierte
(3 Punkte)

a) Seien $K \leq H \leq G$ mit $[G : H]$ und $[H : K]$ endlich. Beweisen Sie, dass $[G : K]$ endlich ist und weiter, dass $[G : K] = [G : H][H : K]$ gilt.

b) Seien $H, K \leq G$ mit $[G : H]$ und $[G : K]$ endlich. Zeigen Sie, dass $[G : H \cap K] \leq [G : H][G : K]$. Falls $[G : H]$ und $[G : K]$ teilerfremd sind, zeigen Sie, dass $[G : H \cap K] = [G : H][G : K]$.

Hinweis:Betrachten Sie die Abbildung $\phi : x(H \cap K) \mapsto (xH, xK)$. Vergessen Sie nicht zu erklären, warum diese Abbildung wohldefiniert ist.

Abgabe: Freitag, 20. Januar 2017, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.