Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Simon Müller
WS 2016-2017

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Algebra B3

Weihnachtsblatt

Alle Aufgaben dieses Blatts sind freiwillig.
Bei jeder richtig beantworteten Frage bekommt man einen Bonuspunkt.

R ist überall ein Integritätsring, F ist überall ein Körper.

Aufgabe 1

a) Sei R ein Hauptidealring und $\mathfrak{p} \lhd R$ prim. Zeigen Sie, dass $R/\mathfrak{p}$ ein Hauptidealring ist.

b) Sei R ein Hauptidealring und $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge. Zeigen Sie, dass $S^{-1}R$ ein Hauptidealring ist.

c) Sei $\mathfrak{p} \lhd R$ prim. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p}R[X]$, das von $\mathfrak{p}$ in $R[X]$ erzeugte Ideal, auch prim ist.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $f \in R[X]$ genau dann in $\mathfrak{p}R[X]$ liegt, wenn alle seine Koeffizienten in $\mathfrak{p}$ liegen.

Aufgabe 2

Sei $\gamma := i\sqrt{5}$ und $R := \mathbb{Z}[\gamma]$.

a) Zeigen Sie, dass $2, 3, 1+\gamma, 1-\gamma$ irreduzibel in R sind.

b) Finden Sie zwei verschiedene Zerlegungen von 6 in irreduzible Elemente in R.

c) Sei $I =< 2, 1+\gamma >$. Zeigen Sie, dass I kein Hauptideal ist. Zeigen Sie dann, dass I^2 ein Hauptideal ist.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass das Polynom $X^4 + 9X^3 + 3X + 1 + i\sqrt{2}$ irreduzibel über $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ ist.
Hinweis: überlegen Sie sich, ob $1 + i\sqrt{2}$ prim in $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $X^{2^n} + 1$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.
Hinweis: betrachten Sie das Polynom $(X+1)^{2^n} + 1$.

c) Sei L ein Zerfällungskörper des Polynoms $f := X^4 + 2X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Bestimmen Sie $[L : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 4

a) Sei K/F eine algebraische Erweiterung und $R \subseteq K$ ein Teilring von K, der F enthält. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

b) Sei $\mathrm{char}(F) \neq 2$. Sei K/F eine Erweiterung vom Grad 2. Zeigen Sie, dass es ein $\alpha \in K$ gibt, so dass $\alpha^2 \in F$ und $K = F(\alpha)$. Geben Sie ein Gegenbeispiel im Fall $\mathrm{char}(F) = 2$ an.

c) Sei K/F eine Erweiterung und $x \in K$ transzendent über F. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ $[F(x) : F(x^n)] = n$ und dass x^n auch transzendent über F ist.

Abgabe: Freitag, 13. Januar 2017, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.