Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2012

Sebastian Gruler
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 4 zur Polynomialen Optimierung

Aufgabe 1 (9 Punkte). Die Dualität der linearen Optimierung ist in der Literatur ganz anders beschrieben als in unserer Vorlesung. Nehme hierzu eine Literaturquelle Deiner Wahl (Buch, Internet, Skript, Vorlesungsmitschrift, ...), in der das zu einem LP duale LP beschrieben wird.

(a) Nenne Deine Quelle und beschreibe, wie dort ein LP und sein Dual beschrieben wird.

(b) Vergleiche dies mit 2.3.11 aus der Vorlesung.

(c) Argumentiere, warum dies nur andere Darstellungen derselben Sache sind.

Aufgabe 2 (15 Punkte). Betrachte die Kegel

$$T_k := \left\{ \sum_{i+j\leq k} a_{ij} X^i (1-X)^j \mid a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\} \subseteq \mathbb{R}[X]_k \ (k \in \mathbb{N}) \text{ und } T := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} T_k \subseteq \mathbb{R}[X].$$

(a) Zeige mit dem Fundamentalsatz der Algebra, dass jedes Polynom in $\mathbb{R}[X]$ ein Produkt von Polynomen vom Grad ≤ 2 ist.

(b) Zeige, dass jedes $f \in \mathbb{R}[X]_1$ mit $f \geq 0$ auf $[0,1]$ in T_1 liegt.

(c) Zeige, dass kein $f \in \mathbb{R}[X]_2$ mit einer Nullstelle im offenen Intervall $(0,1)$ in T liegt.

(d) Zeige, dass jedes $f \in \mathbb{R}[X]_2$ mit $f \geq 0$ auf $[0,1]$ und einer Nullstelle in $[0,1]$ aber nicht in $(0,1)$ in T_2 liegt.

(e) Bestimme ein Polynom $h \in \mathbb{Z}[K,L,A,B,C]_4$ derart, dass für alle $a,b,c \in \mathbb{R}$ und $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gilt

$$aX^2 + bX + c = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(\ell-2)!}{k!(\ell-k)!} h(k,\ell,a,b,c) X^k (1-X)^{\ell-k}.$$

(f) Zeige, dass jedes $f \in \mathbb{R}[X]_2$ mit $f > 0$ auf $\mathbb{R}$ in T liegt, indem Du die Diskriminanten der Polynome $f = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]_2$ und $h(K,\ell,a,b,c) \in \mathbb{Z}[K]_2$ betrachtest für $a,b,c \in \mathbb{R}$ und große $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

(g) Zeige, dass jedes $f \in \mathbb{R}[X]$ mit $f > 0$ auf $(0,1)$ in T liegt.

(h) Sei $f \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ mit $f \geq 0$ auf $(0,1)$ und einer Nullstelle in $(0,1)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ sei $k(\varepsilon) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid f + \varepsilon \in T_k\}$. Zeige $\lim_{\varepsilon\to 0} k(\varepsilon) = \infty$.

Abgabe bis Mittwoch, den 6. Juni 2012, um 12:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.