Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2012

Sebastian Gruler
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 5 zur Polynomialen Optimierung

Aufgabe 1 (9 Punkte). Seien $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ und $f, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$. Betrachte das polynomiale Optimierungsproblem

$$(P) \qquad \text{minimiere } f(x) \text{ über } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0$$

und die dazugehörige Momentenrelaxierung vom Grad k

$$(P_k) \qquad \text{minimiere } L(f) \text{ über } L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^* \text{ mit } L(T_k(p_1, \ldots, p_m)) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ und } L(1) = 1.$$

Bezeichne $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0\}$ den zulässigen Bereich von (P).

(a) Zeige $P^* \geq P_\infty^* \geq \cdots \geq P_{k+3}^* \geq P_{k+2}^* \geq P_{k+1}^* \geq P_k^*$

(b) Es besitze $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ eine Quadraturformel, deren Stützstellen alle in S liegen und deren Gewichte sich zu 1 aufsummieren. Zeige, dass dann L eine zulässige Lösung von (P_k) mit $L(f) \geq P^*$ ist.

(c) Es habe (P_k) eine optimale Lösung L^*, die eine Quadraturformel mit allen Stützstellen in S besitzt. Zeige, dass dann in (a) überall Gleichheit gilt.

(d) In der Situation von (c) habe zusätzlich (P) eine eindeutige optimale Lösung x^*. Zeige, dass dann $k \geq 1$, $x^* = (L(X_1), \ldots, L(X_n))$ und allgemeiner $L^*(p) = p(x^*)$ für alle $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$ gilt.

Aufgabe 2 (5 Punkte). Bestimme das zum SDP

$$(P) \qquad \text{minimiere } x_1 \text{ über } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + x_1 \end{pmatrix} \succeq 0$$

duale SDP (D), vereinfache es und zeige $P^* = 0 > -1 = D^*$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Finde ein SDP, dessen zulässiger Bereich einen inneren Punkt hat, mit endlichem Optimalwert, aber ohne optimale Lösung.

Aufgabe 4 (6 Punkte). Finde $m, n \in \mathbb{N}_0$, $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit

$$T_k(p_1, \ldots, p_m) \neq \mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap T(p_1, \ldots, p_m).$$

Abgabe bis Donnerstag, den 28. Juni 2012, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.