**Universität Konstanz**
**Fachbereich Mathematik und Statistik**
**Sommersemester 2015**

Sebastian Gruler
María López Quijorna
Markus Schweighofer

---

# Übungsblatt 3 zur Polynomialen Optimierung

---

**Aufgabe 1 (4 Punkte).** Sei $V$ ein endlichdimensionaler Vektorraum. Für jede Menge $A \subseteq V$ bezeichnen wir mit $\overline{A}$ den Abschluss und $\mathring{A}$ das Innere von $A$. Sei $K \subseteq V$ ein Kegel. Zeige, dass dann auch $\overline{K}$ und $\mathring{K} \cup \{0\}$ Kegel sind.

**Aufgabe 2 (10 Punkte).** Welche der folgenden Kegel besitzt eine Einheit? Begründe Deine Aussage!

(a) der Kegel der positiv semidefiniten Matrizen $\mathbb{R}^{t\times t}_{\succeq 0}$ im Vektorraum $S\mathbb{R}^{t\times t}$ aller symmetrischen $t \times t$-Matrizen,

(b) der Kegel $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ der nichtnegativen stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ im Vektorraum $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$,

(c) der Kegel der nichtnegativen Polynomfunktionen in $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

(d) der Kegel der nichtnegativen Polynome im Vektorraum der Polynome $\mathbb{R}[X]$ in einer Variablen,

(e) der Kegel $\sum \mathbb{R}[X]^2 := \{\sum_{i=1}^m p_i^2 \mid m \in \mathbb{N}_0, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[X]\}$ der Quadratsummen in $\mathbb{R}[X]$,

(f) der Kegel $\sum \mathbb{R}[X]^2 + \sum \mathbb{R}[X]^2(1-X) + \sum \mathbb{R}[X]^2(1+X)$ bestehend aus allen Polynomen der Form $s_0 + s_1(1-X) + s_2(1+X)$ mit $s_0, s_1, s_2 \in \sum \mathbb{R}[X]^2$.

**Aufgabe 3 (10 Punkte).** Betrachte für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ das polynomiale Optimierungsproblem

$$(P_i) \qquad \text{minimiere } f_i(x) \text{ über alle } x \in \mathbb{R},$$

wobei

$$\begin{aligned}
f_1 &:= X^6 - 4X^5 + 6X^4 - 8X^3 + 9X^2 - 4X + 4 \in \mathbb{R}[X],\\
f_2 &:= X^6 - 4X^5 + 7X^4 - 8X^3 + 7X^2 - 4X + 1 \in \mathbb{R}[X] \quad \text{und}\\
f_3 &:= X^6 - 6X^5 + 15X^4 - 24X^3 + 30X^2 - 24X + 8 \in \mathbb{R}[X].
\end{aligned}$$

Füge analog zu Beispiel 1.4.1 aus der Vorlesung zu $(P_i)$ die folgende durch $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ parametrisierte Schar von redundanten Ungleichungen dazu:

$$(a + bx + cx^2 + dx^3)^2 \geq 0 \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R}),$$

schreibe diese Schar als eine einzige polynomiale Matrixungleichung, relaxiere diese zu einer linearen Matrixungleichung $M_i(y) \succeq 0$ und betrachte die Relaxierung

$$(R_i) \qquad \text{minimiere } \ell_i(y) \text{ über alle } y \in \mathbb{R}^6 \text{ mit } M_i(y) \succeq 0$$

von $(P_i)$ mit $\ell_i \in \mathbb{R}[Y_1, \dots, Y_6]_1$ und $M_i \in S\mathbb{R}[Y_1, \dots, Y_6]_1^{4\times 4}$. Finde mit dem Rechner annähernd optimale Lösungen $y_i^* \in \mathbb{R}^6$ von $(R_i)$ und die Optimalwerte $R_i^*$ für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$. Finde $\lambda \in [0, 1]$ mit

$$y_3^* \approx \lambda y_1^* + (1 - \lambda) y_2^*.$$

Faktorisiere jedes $f_i$ in $\mathbb{R}[X]$. Welche Beobachtungen machst Du? Welche Fragen stellen sich? Kommentiere!

**Abgabe** bis Dienstag, den 26. Mai 2015, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.