Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2012/2013

Sebastian Gruler
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 4 zur Reellen Algebraischen Geometrie I

Aufgabe 12. Sei (R, P) ein angeordneter Körper. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) R ist reell abgeschlossen (und folglich $P = R^2$)

(b) Wenn (L, Q) ein angeordneter Oberkörper von (R, P) ist mit $L|R$ algebraisch, so gilt $L = R$.

(c) In (R, P) gilt der Zwischenwertsatz für Polynome, das heißt für alle $f \in R[X]$ und $a, b \in R$ mit $a \leq_P b$ und $\operatorname{sgn}(f(a)) \neq \operatorname{sgn}(f(b))$ gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$.

Aufgabe 13. Sei R ein reell abgeschlossener Körper und K ein Unterkörper von R, der in R (relativ) algebraisch abgeschlossen ist. Zeige, dass K dann auch reell abgeschlossen ist.

Aufgabe 14. Sei C ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0. Zeige, dass es einen reell abgeschlossenen Unterkörper R von C mit $C = R(\sqrt{-1})$ gibt.

Aufgabe 15. Gebe explizit eine Anordnung P auf $\mathbb{R}(X, Y)$ an, so dass für alle $f \in \mathbb{R}[X, Y]$ gilt:

$$0 < f(0,0) \implies f \in P.$$

Abgabe bis Donnerstag, den 22. November, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411 .