**Universität Konstanz**
**Fachbereich Mathematik und Statistik**
**Wintersemester 2012/2013**

Sebastian Gruler
María López Quijorna
Markus Schweighofer

---

Übungsblatt 7 zur Reellen Algebraischen Geometrie I

---

**Aufgabe 23.** Sei $R$ ein reell abgeschlossener Körper. Zeige, dass die semialgebraischen Teilmenge von $R$ genau die endlichen Vereinigungen von Mengen der folgenden Form sind:

$$\{a\} \text{ und } (b,c) \qquad (a \in R,\ b,c \in R \cup \{\pm\infty\})$$

**Aufgabe 24.** Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Wir statten $K$ mit der durch $\leq$ gegebenen *Ordnungstopologie* $\mathcal{O}$ aus, die erzeugt wird von den Intervallen $(a,b)$ mit $a,b \in K$ (das heißt sie ist die kleinste Topologie auf $K$, die diese Intervalle enthält). Weiter statten wir $K^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ aus mit der dazugehörigen Produkttopologie aus, welche erzeugt wird von den Mengen $U_1 \times \dots \times U_n$ mit $U_i \subseteq K$ offen für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

(a) Zeige, dass $\{(a,b) \mid a,b \in K\}$ eine Basis (offener Mengen) der Ordnungstopologie auf $K$ ist.

(b) Zeige, dass $\{\prod_{i=1}^n (a_i, b_i) \mid a_i, b_i \in K\}$ eine Basis der dazugehörigen Produkttopologie auf $K^n$ ist.

(c) Zeige, dass $(K, \mathcal{O})$ ein topologischer Körper ist, das heißt die Abbildungen

$$K \times K \to K,\ (a,b) \mapsto a+b, \quad K \times K \to K,\ (a,b) \mapsto ab \quad \text{und} \quad K \setminus \{0\} \to K, a \mapsto a^{-1}$$

sind stetig (beachte, dass man hier *nicht* das Folgenkriterium für Stetigkeit verwenden darf).

**Aufgabe 25.** Sei $\varepsilon$ eine Unbestimmte und $K := \mathbb{Q}(\varepsilon)$ der Körper der rationalen Funktionen in $\varepsilon$ über $\mathbb{Q}$. Bezeichne $P$ die nach Aufgabe 10 existierende und eindeutig bestimmte Anordnung von $K$ mit $0 < n\varepsilon < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Bezeichne $R := \overline{(K,P)}$ den reellen Abschluss von $(K,P)$. Zeige:

(a) $K \cap (\sqrt{\varepsilon}, 2\sqrt{\varepsilon}) = \emptyset$

(b) Für $f := X^4 - 5\varepsilon X^2 + 4\varepsilon^2 \in K[X]$ gilt $f \geq 0$ auf $K$ aber nicht auf $R$.

(c) $K$ liegt nicht dicht in seinem reellen Abschluss $R$ bezüglich der Ordnungstopologie auf $R$.

**Aufgabe 26.** Begründe oder widerlege durch ein Gegenbeispiel: Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{Q}$, so gilt $f(x) \geq_K 0$ für alle angeordneten Körper $(K, \leq_K)$ und alle $x \in K$.

**Abgabe** bis Donnerstag, den 13. Dezember, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.