Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2012/2013

Sebastian Gruler
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 8 zur Reellen Algebraischen Geometrie I

Aufgabe 27. Welche der folgenden Aussagen gelten für alle reell abgeschlossene Körper R? Gebe einen Beweis oder ein Gegenbeispiel!

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Jedes Polynom aus $R[X_1, \dots, X_n]$ nimmt auf $\{x \in R^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ ein Minimum an.

(b) In R gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, wobei $\sqrt[n]{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ das nach der Regel von Descartes eindeutig bestimmte $x \in R_{>0}$ mit $x^n = 1$ bezeichne.

(c) Seien $f \in R[X]$ und $a, b \in R$. Dann gibt es $c, d \in R$ mit $\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = [c, d]$.

(d) $\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in R : \forall \varepsilon \in R_{>0} : \exists \delta \in R_{>0} : \forall y \in R \setminus \{x\} :$

$$\left(|x - y| < \delta \implies \left|\frac{x^n - y^n}{x - y} - nx^{n-1}\right| < \varepsilon\right)$$

Aufgabe 28. Seien R ein reell abgeschlossener Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $S \subseteq R^n$ semialgebraisch. Statte den R^n wie in Aufgabe 24 mit der Produkttopologie der Intervalltopologie aus. Welche der folgenden Mengen sind wieder semialgebraisch?

(a) Das Innere $\mathring{S}$ von S.

(b) Der Abschluss $\overline{S}$ von S.

(c) Die affine Hülle

$$\operatorname{aff} S := \left\{\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{N},\ x_1, \dots, x_k \in S,\ \lambda_1, \dots, \lambda_k \in R,\ \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\right\}.$$

(d) Die konvexe Hülle

$$\operatorname{conv} S := \left\{\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{N},\ x_1, \dots, x_k \in S,\ \lambda_1, \dots, \lambda_k \in R_{\geq 0},\ \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\right\}.$$

(e) Die Menge

$$\Sigma(S) := \left\{\sum_{i=1}^k x_i \mid k \in \mathbb{N},\ x_1, \dots, x_k \in S\right\}.$$

Abgabe bis Donnerstag, den 20. Dezember, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.