Universität Konstanz Sebastian Gruler
Fachbereich Mathematik und Statistik María López Quijorna
Wintersemester 2012/2013 Markus Schweighofer

Übungsblatt 9 zur Reellen Algebraischen Geometrie I

Aufgabe 29. Seien K ein Körper und $f, g \in K[X_1, \dots, X_n]$. Wir nennen $a \in K$ einen *Eckkoeffizienten* von f, wenn es eine Ecke α des Newton-Polytops $N(f)$ von f gibt derart, dass $aX_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ ein Monom von f ist. Zeige:

(a) Alle Eckkoeffizienten von f sind $\neq 0$.

(b) $N(fg) = N(f) + N(g)$ und jeder Eckkoeffizient von fg ist das Produkt eines Eckkoeffizienten von f mit einem Eckkoeffizienten von g.

(c) $N(f + g) \subseteq \operatorname{conv}(N(f) \cup N(g))$

Aufgabe 30. Seien $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper und $f, g \in K[X_1, \dots, X_n]$ derart, dass alle Eckkoeffizienten von f und von g dasselbe Vorzeichen haben. Zeige

$$N(f + g) = \operatorname{conv}(N(f) \cup N(g))$$

und dass alle Eckkoeffizienten von $f + g$ ebenfalls dieses Vorzeichen haben.

Aufgabe 31. Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper und $f \in K[X_1, \dots, X_n]$. Zeige $N(f^2) = 2N(f)$ und, dass die Eckkoeffizienten von f^2 Quadrate der Eckkoeffizienten von f und damit positiv sind.

Aufgabe 32. Seien $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper, $\ell \in \mathbb{N}_0$, $p_1, \dots, p_\ell \in K[X_1, \dots, X_n]$ und $f := \sum_{i=1}^{\ell} p_i^2$. Zeige

$$N(f) = 2 \operatorname{conv}(N(p_1) \cup \dots \cup N(p_\ell))$$

und, dass alle Eckkoeffizienten von f positiv sind.

Aufgabe 33. Kritisiere oder verteidige Deine eigene Lösung sowie die in der Übung vorgeführte Lösung von Aufgabe 10 auf Blatt 3. Füge dabei Kopien der Lösungen an das Übungsblatt an. Gehe dabei insbesondere noch einmal auf die Frage ein, ob die Lösungen wirklich lückenlos zeigen, dass sich jede Anordnung von $\mathbb{Q}(X)$ auf $\mathbb{R}(X)$ fortsetzen lässt. Versuche im Falle einer Kritik, die Lücke zu schließen oder stelle zumindest Ideen vor, die zu einer Schließung einer Lücke führen könnten. Detailliere die Lösungen im Falle einer Verteidigung.

Abgabe bis Donnerstag, den 10. Januar, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.