Universität Konstanz Sebastian Gruler
Fachbereich Mathematik und Statistik María López Quijorna
Wintersemester 2012/2013 Markus Schweighofer

Übungsblatt 11 zur Reellen Algebraischen Geometrie I

Aufgabe 39. Sei A ein kommutativer Ring, P ein Primkegel von A und $\mathfrak{p} := P \cap -P$. Zeige, dass dann

$$P_{\mathfrak{p}} := \left\{ \frac{\overline{a}^{\mathfrak{p}}}{\overline{s}^{\mathfrak{p}}} \mid a \in A, s \in A \setminus \mathfrak{p}, as \in P \right\}$$

eine Anordnung von $\operatorname{qf}(A/\mathfrak{p})$ ist.

Aufgabe 40. Finde und fülle alle Lücken im Beweis von Proposition 3.1.10.

Aufgabe 41. Zeige:

(a) Urbilder von Präordnungen unter Homomorphismen von kommutativen Ringen sind wieder Präordnungen.

(b) Bilder von Präordnungen unter Epimorphismen von kommutativen Ringen sind wieder Präordnungen.

Gilt dasselbe auch für Primkegel statt Präordnungen?

Aufgabe 42. Sei I ein Ideal des kommutativen Ringes A. Zeige, dass die Zuordnungen

$$\begin{aligned} T &\mapsto \overline{T}^I := \{\overline{a}^I \mid a \in T\} \\ \{a \in A \mid \overline{a}^I \in P\} &\mapsfrom P \end{aligned}$$

eine Bijektion vermitteln zwischen der Menge der

(a) Präordnungen T von A mit $I \subseteq T$ und der Menge der Präordnungen von A/I.

(b) Primkegel T von A mit $I \subseteq T$ und der Menge der Primkegel von A/I.

Aufgabe 43. Sei A ein kommutativer Ring, $S \subseteq A$ multiplikativ und $T \subseteq A$ eine Präordnung. Bezeichne $\iota\colon A \to S^{-1}A, a \mapsto \frac{a}{1}$ den kanonischen Homomorphismus. Zeige, dass die von $\iota(T)$ in $S^{-1}A$ erzeugte Präordnung gleich

$$S^{-2}T := \left\{ \frac{t}{s^2} \mid t \in T, s \in S \right\}$$

ist. Zeige, dass diese genau dann echt ist, wenn $T \cap -S^2 = \emptyset$

Abgabe bis Donnerstag, den 24. Januar, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.