
Übungsblatt 12 zur Reellen Algebraischen Geometrie I

Aufgabe 44. Sei (A, T) ein prägeordneter Ring. Zeige, dass jede konstruierbare Teilmenge von $\text{sper}(A, T)$ von der Gestalt

$$\bigcup_{i=1}^k \left\{ P \in \text{sper}(A, T) \mid \hat{a}_i(P) = 0, \hat{b}_{i1}(P) > 0, \dots, \hat{b}_{im}(P) > 0 \right\}$$

mit $k, m \in \mathbb{N}_0$ und $a_i, b_{ij} \in A$ ist.

Aufgabe 45. Sei A ein kommutativer Ring. Für jedes Ideal $I \subseteq A$ definieren wir

$$\sqrt[2]{I} := \{a \in A \mid \exists s \in \sum A^2 : a^2 + s \in I\}$$

und induktiv für $k \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[2^{k+1}]{I} := \sqrt[2]{\sqrt[2^k]{I}}.$$

- (a) Zeige, dass $\{a \in A \mid a^2 \in I\}$ im Allgemeinen kein Ideal von A ist.
(b) Zeige, dass $\sqrt[2]{I}$ ein Ideal ist. Wir nennen es das *Quadratwurzelideal* von I .
(c) Zeige für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[2^k]{I} = \left\{ a \in A \mid \exists s \in \sum A^2 : a^{2^k} + s \in I \right\}.$$

- (d) Zeige $\text{rrad } I = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \sqrt[2^k]{I}$.
(e) Zeige, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $\text{rrad } I = \sqrt[2^k]{I}$, falls A noethersch ist.

Aufgabe 46. Sei K ein euklidischer Körper, $n \in \mathbb{N}$, I ein Ideal von $K[X_1, \dots, X_n]$,

$$\{X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^n\} = \{t_i \mid i \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad v_k := \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} \text{ für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Jede Matrix $W \in K^{k \times m}$ stellt ein Polynom $\text{pol}(W) := v_k^T W v_m$ dar. Zeige

$$\sqrt[2]{I} = \{\text{pol}(W) \mid k, m \in \mathbb{N}, U \in SK^{m \times m}, W \in K^{k \times m}, \text{pol}(U) \in I, U - W^T W \text{ psd}\}.$$

Abgabe bis Dienstag, den 5. Februar, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.