Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2018

Sabine Burgdorf
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 3 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1: Man beweise folgende Ergänzung von Proposition 6.3.4: Seien V und W K-Vektorräume, $F \subseteq V$ und $g\colon F \to W$. Ist F linear unabhängig, so gibt es mindestens eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ mit $f|_F = g$.

Aufgabe 2: Sei V ein Vektorraum und $\ell_1, \dots, \ell_n \in V^*$. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) $\ell_1, \dots, \ell_n$ sind linear unabhängig.

(b) Die lineare Abbildung $V \to K^n,\ x \mapsto \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \vdots \\ \ell_n(x) \end{pmatrix}$ ist surjektiv.

Aufgabe 3: Für jeden Unterraum U von V nennen wir

$$\operatorname{codim} U := \operatorname{codim}_V U := \dim(V/U) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

die *Kodimension* von U (in V). Zeige, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\operatorname{codim} U = n$

(b) Es gibt linear unabhängige $\ell_1, \dots, \ell_n \in V^*$ mit

$$U = \{x \in V \mid \ell_1(x) = \ldots = \ell_n(x) = 0\}.$$

Aufgabe 4: Sei B eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ mit $\forall x \in B : \lambda x \in B$. Zeige:

(a) Es gibt genau einen $\mathbb{Q}$-Vektorraumhomomorphismus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 1$ für alle $x \in B$.

(b) $f(\lambda x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(c) $\lambda = 1$

Abgabe bis Freitag, den 11. Mai 2018, um 9:55 Uhr in das Fach Ihres Tutors neben dem Raum F411.