Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2018

Sabine Burgdorf
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 4 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1: Seien A, B und C Mengen. Zeige:

(a) Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \Phi\colon C^{A\times B} &\to (C^B)^A \\ f &\mapsto \begin{pmatrix} A \to C^B \\ a \mapsto f(a,.) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Psi\colon (C^B)^A &\to C^{A\times B} \\ g &\mapsto \begin{pmatrix} A\times B \to C \\ (a,b) \mapsto (g(a))(b) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sind zueinander invers.

(b) Ist C sogar ein K-Vektorraum, so sind Φ und Ψ sogar K-Vektorraumisomorphismen.

Aufgabe 2: Seien U, V und W K-Vektorräume. Zeige, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} \Phi\colon \{b \mid b\colon U\times V \to W \text{ bilinear}\} &\to \operatorname{Hom}(U, \operatorname{Hom}(V,W)) \\ b &\mapsto \begin{pmatrix} U \to \operatorname{Hom}(V,W) \\ u \mapsto b(u,.) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Psi\colon \operatorname{Hom}(U, \operatorname{Hom}(V,W)) &\to \{b \mid b\colon U\times V \to W \text{ bilinear}\} \\ f &\mapsto \begin{pmatrix} U\times V \to W \\ (u,v) \mapsto (f(u))(v) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

zueinander inverse K-Vektorraumisomorphismen sind.

Aufgabe 3: Sei K ein Körper. Zeige, dass die Menge $\{(1,x,x^2,x^3,\dots) \mid x \in K\}$ im K-Vektorraum $K^{\mathbb{N}_0}$ aller Folgen in K linear unabhängig, aber keine Basis ist.

Bemerkung: Falls niemand in der Lage ist, zu zeigen, dass sie keine Basis ist, wird die Aufgabe mit Hinweisen auf dem nächsten Blatt noch einmal gestellt.

Abgabe bis Freitag, den 18. Mai 2018, um 9:55 Uhr in das Fach Ihres Tutors neben dem Raum F411.