

Übungsblatt 6 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1: Die *Fakultät* $n!$ einer Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ ist definiert durch $n! := \prod_{i=1}^n i$. Insbesondere gilt $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$ und so weiter. Betrachte für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Matrix

$$A_n := \begin{pmatrix} 0! & 1! & 2! & 3! & \cdots & n! \\ 1! & 2! & 3! & & & \vdots \\ 2! & 3! & & & & \vdots \\ 3! & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ n! & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & (2n)! \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{(n+1) \times (n+1)}.$$

- Begründe kurz, warum $\#S_n = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.
- Berechne mit dem Algorithmus aus der Vorlesung per Hand eine verallgemeinerte Cholesky-Zerlegung von A_0 , A_1 , A_2 und A_3 .
- Schreibe in einer beliebigen Programmiersprache ein kleines Computerprogramm, welches den Algorithmus aus 13.5.9 für *positiv definite reelle* Matrizen umsetzt (beachte, dass nur der Fall 2 im Beweis von 13.5.9 relevant ist, vergleiche Bemerkung 14.2.14). Dabei darf approximativ (also mit Gleitkommaarithmetik) gerechnet werden. Lege den ausgedruckten Quelltext (der möglichst kurz sein soll, aber nicht kommentiert sein muss) bei. Versuche damit, Cholesky-Zerlegungen von A_4 und A_5 zu berechnen.
- Stelle eine Vermutung an, wie allgemein eine verallgemeinerte Cholesky-Zerlegung von A_n aussehen könnte. Dabei kann die Webseite <https://oeis.org> sehr nützlich sein.

Aufgabe 2: Der *Binomialkoeffizient* $\binom{x}{k}$ („ k aus x “) ist für $x \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definiert durch $\binom{x}{k} := \prod_{i=1}^k \frac{x-i+1}{i} = \frac{1}{k!} \prod_{i=1}^k (x-i+1)$.

- Begründe kurz, warum $\#\{A \mid A \subseteq \{1, \dots, n\}, \#A = k\} = \binom{n}{k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt.
- Zeige

$$\sum_{j=0}^k (i!) \binom{i}{j} (k!) \binom{k}{j} = (i+k)!$$

für alle $i, k \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 3: Betrachte die (formale) Ableitungen $D: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$, $p \mapsto p'$ aus 6.3.2(f).

(a) Begründe, warum es Sinn macht, von der Summe aller Ableitungen

$$Ep := p + p' + p'' + p''' + \dots$$

eines Polynoms $p \in \mathbb{R}[X]$ zu reden und zeige, dass die dadurch definierte Abbildung $E: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ ein $\mathbb{R}$ -Vektorraumhomomorphismen ist.

(b) Bestimme für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Darstellungsmatrix A_n der quadratischen Form

$$\mathbb{R}[X]_n \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto E(p^2)(0)$$

bezüglich der Basis $1, X, X^2, \dots, X^n$ von $\mathbb{R}[X]_n$.

(c) Zeige, dass A_n für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ positiv definit ist.

(d) Zeige, dass für jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ die Summe aller Ableitungen von p^2 ein Polynom ist, welches auf der ganzen reellen Achse positiv ist.

Abgabe bis Freitag, den 1. Juni 2018, um 9:55 Uhr in das Fach Ihres Tutors neben dem Raum F411.