

---

Übungsblatt 7 zur Linearen Algebra II

---

**Aufgabe 1:** Sei  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und  $f \in \text{End}(V)$  selbstadjungiert [ $\rightarrow$  11.3.1]. Seien  $v$  und  $w$  Eigenvektoren von  $f$  zu verschiedenen Eigenwerten. Zeige  $v \perp w$  [ $\rightarrow$  11.2.1].

**Aufgabe 2:** Betrachte  $q_1, q_2 \in Q(\mathbb{R}^3)$  definiert durch

$$\begin{aligned} q_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 \quad \text{und} \\ q_2(x) &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_3^2 \end{aligned}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^3$ .

- (a) Bestimme jeweils die Sylvester-Signatur von  $q_1$  und  $q_2$ .
- (b) Finde ein Skalarprodukt  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$  auf  $\mathbb{R}^3$ , für welches  $q_1(x) = \langle x, x \rangle$  für  $x \in \mathbb{R}^3$  gilt.
- (c) Bestimme ausgehend von der Standardbasis  $\underline{e}$  des  $\mathbb{R}^3$  mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine ONB  $\underline{w}$  des  $\mathbb{R}^3$  bezüglich des Skalarproduktes aus (b) [ $\rightarrow$  11.2.15].
- (d) Berechne die Darstellungsmatrix  $A := M(q_2, \underline{w})$  von  $q_2$  bezüglich  $\underline{w}$ .
- (e) Berechne die Eigenwerte von  $A$  und zeige, dass sie paarweise verschieden sind.
- (f) Berechne eine Basis  $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$  von  $\mathbb{R}^3$ , die aus Eigenvektoren von  $A$  besteht.
- (g) Begründe, warum  $u_1$ ,  $u_2$  und  $u_3$  bezüglich des Standardskalarprodukts auf dem  $\mathbb{R}^3$  paarweise senkrecht aufeinander stehen.
- (h) Begründe mittels 11.2.24, dass  $\underline{v} := (\text{vec}_{\underline{w}}(u_1), \text{vec}_{\underline{w}}(u_2), \text{vec}_{\underline{w}}(u_3))$  eine Basis von  $\mathbb{R}^3$  ist, deren Vektoren Eigenvektoren von  $f := \text{vec}_{\underline{w}} \circ f_A \circ \text{coord}_{\underline{w}} \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  sind und bezüglich des Skalarproduktes aus (b) paarweise orthogonal sind.
- (i) Begründe, warum  $M(f, \underline{v})$  eine Diagonalmatrix ist.
- (j) Berechne  $M(q_1, \underline{v})$  und  $M(q_2, \underline{v})$ .

**Aufgabe 3:** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  positiv semidefinit.

- (a) Zeige mittels 11.3.10, dass es eine positiv semidefinite Matrix  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gibt mit  $A = B^2$ .

Im folgenden seien  $B \in S\mathbb{R}^{n \times n}$  beliebig mit  $A = B^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein Eigenwert von  $A$  und  $U := \ker(A - \lambda I_n)$  der zugehörige Eigenraum.

- (b) Zeige  $f_B(U) \subseteq U$  [ $\rightarrow$  6.3.2(e)].
- (c) Zeige, dass  $f_B|_U$  keine andere Eigenwerte als  $\sqrt{\lambda}$  und  $-\sqrt{\lambda}$  haben kann.
- (d) Zeige, dass  $f_B|_U$  ein selbstadjungierter Endomorphismus von  $U$  ist.

Ab jetzt sei  $B$  zusätzlich positiv semidefinit.

- (e) Zeige  $f_B|_U = \sqrt{\lambda} \text{id}_U$ .
- (f) Begründe, warum  $B$  aus (a) eindeutig ist.

**Abgabe** bis Freitag, den 8. Juni 2018, um 9:55 Uhr in das Fach Ihres Tutors neben dem Raum F411.