Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2018

Sabine Burgdorf
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 8 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1: Man zeige, dass man Blockmatrizen so multipliziert, wie man Matrizen multipliziert, genauer: Seien K ein kommutativer Ring, $m, n, p \in \mathbb{N}_0$, $n_i \in \mathbb{N}_0$, $m_j \in \mathbb{N}_0$, $p_k \in \mathbb{N}_0$, $A_{ij} \in K^{m_i \times n_j}$ und $B_{jk} \in K^{n_j \times p_k}$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $k \in \{1, \ldots, p\}$. Setze $M := m_1 + \ldots + m_m$, $N := n_1 + \ldots + n_n$, $P := p_1 + \ldots + p_p$. Zeige

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline A_{m1} & \ldots & A_{mn} \end{array}\right)}_{\in K^{M \times N}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} B_{11} & \ldots & B_{1p} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline B_{n1} & \ldots & B_{np} \end{array}\right)}_{\in K^{N \times P}} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} \sum_{j=1}^n A_{1j} B_{j1} & \ldots & \sum_{j=1}^n A_{1j} B_{jp} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \sum_{j=1}^n A_{mj} B_{j1} & \ldots & \sum_{j=1}^n A_{mj} B_{jp}. \end{array}\right)}_{\in K^{M \times P}}.$$

Aufgabe 2: Zeige:

(a) Für alle Körper K, für alle paarweise verschiedenen $a_1, \ldots, a_n \in K$ und für alle $b_1, \ldots, b_n$ gibt es ein Polynom $p \in K[X]$ mit $p(a_i) = b_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(b) Für alle Diagonalmatrizen $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt es ein Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ mit $p(D) = D^*$.

(c) Für alle normalen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt es ein Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ mit $A^* = p(A)$.

(d) Für alle normalen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und alle $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $AC = CA$ gilt $A^*C = CA^*$.

(e) Für alle normalen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und alle $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $BC = CA$ gilt $B^*C = CA^*$.

Seien ab jetzt $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeige:

(f) Sind $f, g \in \operatorname{End}(V)$ normal und $h \in \operatorname{End}(V)$ mit $g \circ h = h \circ f$, so gilt $g^* \circ h = h \circ f^*$.

(g) Sind $f, g \in \operatorname{End}(V)$ normal mit $f \circ g = g \circ f$, so sind auch $f \circ g$ und $f + g$ normal.

Hinweis: Betrachte für (e) die Blockmatrizen $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline C & 0 \end{array}\right) \in \mathbb{C}^{(2n) \times (2n)}$.

Abgabe bis Freitag, den 15. Juni 2018, um 9:55 Uhr in das Fach Ihres Tutors neben dem Raum F411.

Ankündigung: Es ist wieder soweit. Die Tutoren des zweiten Semesters fordern ihre Studenten im Fußball heraus. Gespielt wird am Dienstag, den 12.6.2018 ab 17 Uhr am Uni Sportgelände in Egg. Alle Zweitsemester sind herzlich eingeladen mitzuspielen oder zum anfeuern zu kommen. Siegesfeier ist im Anschluss beim Mathegrillen auf F4.