Universität Konstanz
Department of Mathematics and Statistics
Wintersemester 2017/2018

Tom-Lukas Kriel
María López Quijorna
Cordian Riener

Reelle algebraische Geometrie I – Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4P) Zeige, dass jedes nichtnegative univariate reelle Polynom $f \in \mathbb{R}[t]$ eine Summe von 2 Quadraten reeller Polynome ist.

Hinweis: Für ein komplexes Polynom $p = \sum_{i=0}^{k} a_i t^i$ mit $a_i \in \mathbb{C}$ sei $p^* = \sum_{i=0}^{k} a_i^* t^i$. Schreibe zuerst $f = g^* g$ mit $g \in \mathbb{C}[t]$. Idee hierzu: Was bedeutet eine solche Darstellung für die Nullstellen von f.

Aufgabe 2 (8P) Ein Polyeder ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^m$, welche endlicher Schnitt von Mengen der Form $\{x \in \mathbb{R}^m \mid p(x) \geq 0\}$ mit $p \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_m]_1$ (reelle Polynome von Grad maximal 1) ist. Gegeben sei ein Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid p_1(x_0, x) \geq 0, ..., p_m(x_0, x) \geq 0\}$ mit $p_i \in \mathbb{R}[X_0, \underline{X}]_1$.

(a) Zeige, dass man $q_1, ..., q_\alpha, r_1, ..., r_\beta, s_1, ..., s_\gamma \in \mathbb{R}[\underline{X}]_1$ finden kann so, dass $\alpha + \beta + \gamma = m$ und

$$P = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 \geq q_1(x), ..., x_0 \geq q_\alpha(x), x_0 \leq r_1(x), ..., x_0 \leq r_\beta(x), s_1(x), ..., s_\gamma(x) \geq 0\}$$

(b) Sei $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n, (x_0, x) \mapsto x$. Zeige, dass die Projektion $\varphi(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists x_0 \in \mathbb{R} : (x_0, x) \in P\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, ..., \alpha\} \forall j \in \{1, ..., \beta\} : r_j(x) \geq q_i(x) \;\&\; s_1(x) \geq 0, ..., s_\gamma(x) \geq 0\}$ auf $\mathbb{R}^n = \{0\} \times \mathbb{R}^n$ wieder ein Polyeder ist.

(c) Finde ein Verfahren, um festzustellen, ob P leer ist.

(d) Bei Sepps Kinobesuch darf ein kulinarischer Leckerbissen nicht fehlen. Als echter Feinschmecker entscheidet sich Sepp für den Klassiker: Popcorn und Marshmallows ertränkt in Ketchup. Für das Unterfangen hat Sepp nach Kauf einer 3D-Brille und dem Überlängenzuschlag noch 6 Euro übrig. Das Verhältnis Festkörper:Flüssigkeit soll höchstens 2:1 betragen. Um seinen täglichen Tagesbedarf zu decken, möchte Sepp mindestens 2100 Kalorien zu sich nehmen. Da Vitamin B6 irgendwas tolles im Körper macht, ist ein Unterschreiten von 1,5mg völlig inakzeptabel.

	Preis pro 100g in Euro	Kalorien pro 100g	Vitamin B6 in mg pro 100g
Marshmallow	0,2	318	0
Popcorn	1	375	0,3
Ketchup	0,5	112	0,2

Können alle Ansprüche von Sepp erfüllt werden? Falls ja, gib eine mögliche Kombination an.

(e) Zeige, dass P genau dann leer ist wenn es $\lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0$ gibt mit $-1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i$

(f) Sei $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^m$ eine affin-lineare Abbildung. Zeige, dass der Graph $\Gamma(\psi) \subseteq \mathbb{R}^{n+1+m}$ und das Bild $\psi(P)$ wieder Polyeder sind.

(g) Finde ein Verfahren, um festzustellen, ob P beschränkt ist.

(h) Zeige, dass $f \in \mathbb{R}[X_0, \underline{X}]_1$ auf P genau dann positiv ist, wenn es $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0$ gibt mit $\lambda_0 f = 1 + \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i$.

(i) Gegeben sei $f \in \mathbb{R}[X_0, \underline{X}]_1$. Finde ein Verfahren, um festzustellen, welches das Minimum/Infimum von f auf P ist.

(j) Zeige, dass $f \in \mathbb{R}[X_0, \underline{X}]_1$ auf P genau dann nichtnegativ ist, wenn $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0$ gibt mit $f = \lambda_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i$.

(k) Finde ein Verfahren, um festzustellen, ob P einen inneren Punkt besitzt, d.h. ein $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $\epsilon > 0$ mit $B(x, \epsilon) \subseteq P$.

Aufgabe 3 (4P) In der Vorlesung hatten wir die Newton-Summen gesehen. Wir verallgemeinern diese wie folgt: Seien $f, q \in \mathbb{R}[t]$ beliebige Polynome. Bezeichne mit $\alpha_1, ..., \alpha_d$ von f in $\mathbb{C}$, je nach Vielfachheit auch mehrfach aufgeführt. Dann schreiben wir $p_i(f, q) = \alpha_1^i \cdot q(\alpha_1) + \cdots + \alpha_d^i \cdot q(\alpha_d)$ für die verallgemeinerte Newton-Summe von f bezüglich q. Ebenso verallgemeinern wir die Hermine-Matrix zu $\mathscr{H}(f, q) := \left(p_{i+j}(f, q)\right)_{i,j=0,\ldots,d-1}$.

(a) Sei $q = \sum_{j=0}^{d'} b_j t^j$. Zeige, dass $p_k(f, q) = \sum_j b_j p_{k+j}(f)$ gilt.

(b) Zeige, dass der Rang von $\mathscr{H}(f, q)$ genau der Anzahl von (komplexen) Nullstellen von f entspricht, bei denen $q \neq 0$ gilt.

(c) Zeige das sign $\mathscr{H}(f, q) = \sum_{\alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha) = 0} \operatorname{sign} q(\alpha)$ gilt.
Hinweis: Verallgemeinere die Argumente des Beweises aus der Vorlesung

(d) Seien $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{R}[t]$ und setze für $e \in \{1, 2\}^m$ $q^e := q_1^{e_1} \ldots q_m^{e_m}$. Betrachte die Menge

$$M := \{\alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha) = 0, q_1(\alpha) > 0, \ldots, q_m(\alpha) > 0\}$$

Zeige, dass gilt

$$|M| = \frac{1}{2^m} \sum_{e \in \{1,2\}^m} \operatorname{sign} \mathscr{H}(f, q^e).$$

Abgabe bis 5. November, 2017, 11:45 im Briefkasten RAG I in der Nähe von Raum F411.