Universität Konstanz
Department of Mathematics and Statistics
Wintersemester 2017/2018

Tom-Lukas Kriel
María López Quijorna
Cordian Riener

Reelle algebraische Geometrie I – Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4P)

(a) Sei $f \in \mathbb{R}[t]$ und $a > 0$. Dann ist $\nu(f(X+a)) \leq \nu(f)$.

(b) Finde die Anzahl der positiven und negativen reellen Nullstellen von $f := X^5 - X^4 + 3X^3 + 9X^2 - X + 5 \in \mathbb{R}[X]$ mit Vielfachheit.

Hinweis: Wie kann die Regel von Descartes benutzt werden, um die Anzahl der negativen reellen Nullstellen eines reellen Polynoms von oben zu beschränken?

Aufgabe 2 (4P) Sei $f \in \mathbb{R}[t]$. Zeige, dass $\nu(f)$ modulo 2 der Anzahl der positiven Nullstellen mit Vielfachheit von f entspricht.

Aufgabe 3 (2P) Sei $f \in \mathbb{R}[t]$ hyperbolisch. Zeige, dass die Ableitung f' wieder hyperbolisch oder das Nullpolynom ist und das die Anzahl der positiven Nullstellen von f' im Falle von $f' \neq 0$ weniger oder gleich als die Anzahl der positiven Nullstellen von f.

Aufgabe 4 (4P) Sei $f \in \mathbb{R}[t]$ ein hyperbolisches Polynom. Dann ist $\nu(f)$ gleich der Anzahl der positiven Nullstellen von f mit Vielfachheit.

Aufgabe 5 (2P) Seien $f, g \in \mathbb{R}[t]$, f normiert und $r \in \mathbb{R}$. Zeige, dass es eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{R}^{\deg f \times \deg f}$ gibt so dass $\mathscr{H}(f,g) = P^T \mathscr{H}(f(t+r), g(t+r))P$.

Abgabe bis 10. November, 2017, 11:45 im Briefkasten RAG I in der Nähe von Raum F411.