**Universität Konstanz**
**Department of Mathematics and Statistics**
**Wintersemester 2017/2018**

Tom-Lukas Kriel
María López Quijorna
Cordian Riener

# Reelle algebraische Geometrie I – Übungsblatt 4

**Aufgabe 1** (8P).

(a) Sei $R$ ein reell abgeschlossener Körper und $K$ ein Teilkörper von $R$, der relativ algebraisch abgeschlossen in $R$ ist. Zeige, dass $K$ auch reell abgeschlossen ist.

(b) Zeige, dass es einen reell abgeschlossenen Körper gibt, der nur abzählbar viele Elemente besitzt.

(c) Zeige, dass $K = \{a \in \mathbb{R} \mid \exists m \in \mathbb{N}_0 : b_1, ..., b_m \in \mathbb{R} : 2 = [\mathbb{Q}(b_1) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(b_2, b_1) : \mathbb{Q}(b_1)] = ... = [\mathbb{Q}(a, b_m, ..., b_1) : \mathbb{Q}(b_m, ..., b_1)]\}$ ein Körper, welcher nicht reell abgeschlossen ist aber für den $K^2$ eine Anordnung ist.

(d) Ist der Körper von Blatt 3 Aufgabe 3 (c) reell abgeschlossen?

(e) Sei $K$ ein angeordneter archimedischer Körper und $a$ im algebraischen Abschluss von $K$. Zeige, dass jede Anordnung auf $K(a)$ ebenfalls archimedisch ist.

**Aufgabe 2** (8P). Sei $f \in \mathbb{Q}[t]$ ein normiertes Polynom vom Grad 3. Schreibe

$$f = (t - a_1)(t - a_2)(t - a_3)$$

mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$.

(a) Setze $d := (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_1 - a_3) \in \mathbb{C}$. Zeige, dass der Zerfällungskörper $\mathbb{Q}(a_1, a_2, a_3)$ von $f$ genau dann reell ist, wenn $d^2 \geq 0$, indem du den folgenden Hinweis benutzt.
**Hinweis:** Zeige zuerst $d^2 \in \mathbb{Q}$ mit Galois-Theorie. Untersuche dann die Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(a_1, a_2, a_3)|\mathbb{Q}$ mit einer Fallunterscheidung. Betrachte für diese Fallunterscheidung die Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(d)|\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(a_1, a_2, a_3)|\mathbb{Q}$.

(b) Zeige, dass $\mathbb{Q}(a_1, a_2, a_3)$ genau dann reell ist, wenn $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

(c) Zeige, dass ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt so, dass $g := (f(t + \lambda)) = t^3 + yt + z$ mit $y, z \in \mathbb{R}$.

(d) Zeige mit der Hermite-Methode, dass $\mathbb{Q}(a_1, a_2, a_3)$ genau dann reell ist wenn $-4y^3 - 27z^2 \geq 0$.

(e) Zeige $-4y^3 - 27z^2 = (a_1 - a_2)^2(a_1 - a_3)^2(a_2 - a_3)^2$ durch Nachrechnen oder indem du ein Singularcode beschreibst, welcher selbiges verifizieren kann (diese Art von Gleichheit gilt sogar, wenn $f \in \overline{\mathbb{Q}}$ komplexe Koeffizienten hat, wobei man dann $\lambda, y, z$ auch in $\overline{\mathbb{Q}}$ wählen muss)

**Abgabe bis 24.November, 2017, 11:45 im Briefkasten RAG I in der Nähe von Raum F411.**