

Reelle algebraische Geometrie I – Übungsblatt 6

**Aufgabe 1** (2P) Seien  $m \in \mathbb{N}$  und  $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ . Schreibe  $p_i = \sum_{j=\alpha_i}^{\beta_i} q_{i,j}$  mit  $q_{i,j} \in \mathbb{R}[\underline{X}]$  homogen vom Grad  $j$  sowie  $q_{i,\alpha_i} \neq 0, q_{i,\beta_i} \neq 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Sei  $\alpha = 2 \min\{\alpha_i \mid i \in \{1, \dots, m\}\}$  und  $\beta = 2 \max\{\beta_i \mid i \in \{1, \dots, m\}\}$ . Dann können wir  $p_1^2 + \dots + p_m^2 = \sum_{j=\alpha}^{\beta} r_j$  mit  $r_j \in \mathbb{R}[\underline{X}]$  homogen vom Grad  $j$  schreiben. Dabei sind  $r_\alpha, r_\beta$  nichttriviale Quadratsummen.

**Aufgabe 2** (4P) Im Folgenden wollen wir ein Beispiel geben, dass es nichtnegative Polynome gibt, welche keine Quadratsummen sind. Vervollständige hierzu den folgenden Beweis, indem du die teils knappen Erklärungen durch eigene Kommentare ergänzt:

**Lemma:** Sei  $n = 5$  und  $f = \sum_{i=1}^5 \prod_{j \in \{1, \dots, 5\} \setminus \{i\}} (X_i - X_j) \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ .  $f$  ist nichtnegativ, allerdings keine Summe von Quadraten von reellen Polynomen.

**Beweis:** Zuerst bemerken wir, dass  $f$  unter der Wirkung der  $S_5$  invariant ist. Das bedeutet für jedes  $x \in \mathbb{R}^5$  und jede Permutation  $\varphi \in S_5$  schon  $f(x) = f(\varphi(x))$  ist. Nun sei  $x \in \mathbb{R}^5$ . Um  $f(x) \geq 0$  zu zeigen, können wir annehmen, dass  $x_1 \geq \dots \geq x_5$ . Nun ist

$$f(x) = \left[ (x_1 - x_2) \left[ (x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5) - (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_5) \right] \right. \\ \left. \left[ (x_4 - x_5) \left[ (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) - (x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3) \right] \right] \right. \\ \left. \left[ (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)(x_3 - x_5) \right] \right] \geq 0.$$

Angenommen es gibt  $m \in \mathbb{N}$  und  $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$  mit  $f = \sum_{k=1}^m p_k^2$ . Dann sind alle  $p_k$  homogene Polynome vom Grad 2. Wir wollen zeigen, dass  $p_1 = 0$ . Sei  $y, z \in \mathbb{R}$  und  $\sigma \in S_5$ . Schreibe  $x = (y, y, z, z, z)$ . Dann gilt  $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)}) = 0$ . Damit ist auch  $p_1(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)}) = 0$ .  $p_1$  erfüllt nun die folgende Eigenschaft (Q).

(Q): Schreibe  $p_1 = \sum_{i,j \subseteq \{1, \dots, 5\}} a_{i,j} X_i X_j$  mit  $a_{i,j} \in \mathbb{R}$  und  $a_{i,j} = a_{j,i}$  für alle  $i, j$ . Für jedes  $\sigma \in S_5$  ist:

$$a_{\sigma(1),\sigma(1)} + a_{\sigma(2),\sigma(2)} + 2a_{\sigma(1),\sigma(2)} = 0 \\ a_{\sigma(3),\sigma(3)} + a_{\sigma(4),\sigma(4)} + a_{\sigma(5),\sigma(5)} + 2a_{\sigma(3),\sigma(4)} + 2a_{\sigma(4),\sigma(5)} + 2a_{\sigma(3),\sigma(5)} = 0 \\ 2a_{\sigma(1),\sigma(3)} + 2a_{\sigma(1),\sigma(4)} + 2a_{\sigma(1),\sigma(5)} + 2a_{\sigma(2),\sigma(3)} + 2a_{\sigma(2),\sigma(4)} + 2a_{\sigma(2),\sigma(5)} = 0$$

Nun man kann man ein Computerprogramm erstellen, welches verifiziert, dass ein  $p_1$ , welches (Q) erfüllt, schon 0 ist. (Das Computerprogramm muss nicht implementiert werden; es reicht die Existenz zu zeigen. Zur Vereinfachung darf angenommen, dass man reelle Zahlen exakt in den Computer eingeben kann und dieser auch exakt mit diesen rechnen kann).

**Aufgabe 3** (6P). Welche der folgenden Aussagen gelten für alle reell abgeschlossenen Körper  $R$ ? Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel!

(a) Jedes Polynom  $f \in R[\overline{X}]$  nimmt ein Minimum auf der Menge

$$\left\{ x \in R^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\} \text{ an.}$$

(b) In  $R$  gilt  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{m} = 1$ . Hierbei ist für jedes  $m \in \mathbb{N}$   $\sqrt[m]{m}$  als das eindeutige  $x \in R_{>0}$  mit  $x^m = m$  definiert, welches nach der Regel von Descartes existiert.  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{m} = 1$  soll bedeuten, dass für jedes  $\epsilon \in R_{>0}$  ein  $M \in \mathbb{N}$  existiert so, dass  $|1 - \sqrt[m]{m}| \leq \epsilon$

(c) Sei  $f \in R[X]$  und  $a, b \in R$ . Dann gibt es  $c, d \in R$  mit  $\{f(x) \mid x \in [a, b]_R\} = [c, d]_R$ .

**Aufgabe 4** (8P). Sei  $R$  ein reell abgeschlossener Körper und  $n \in \mathbb{N}_0$ . Betrachte die "Distanzfunktion"  $d: R^n \rightarrow R, x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2$  und die Mengen  $B(x, \epsilon) = \{y \in R^n \mid d(x, y) < \epsilon\}$  für  $x \in R^n$  und  $\epsilon \in R$ . Welche der folgenden Mengen sind semialgebraisch für semialgebraisches  $S \subseteq R^n$ ?

(a) Das Innere  $\mathring{S} := \{x \in R^n \mid \exists \epsilon \in R_{>0} : B(x, \epsilon) \subseteq S\}$  von  $S$ .

(b) Die Menge

$$\Sigma(S) := \left\{ \sum_{i=1}^k x_i \mid k \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_k \in S \right\}.$$

(c) Der  $R$ -Zariski-Abschluss  $\{x \in R^n \mid \forall f \in \mathbb{R}[\overline{X}] : f(S) \subseteq \{0\} \implies f(x) = 0\}$  von  $S$  in  $R^n$ .

(d) Die Menge aller über  $R$  diagonalisierbaren Matrizen  $A \in R^{n \times n} \cong R^{n^2}$ .

**Abgabe bis 8. Dezember, 2017, 11:45 im Briefkasten RAG I in der Nähe von Raum F411.**