Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 1

Aufgabe 1.1. Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, I ein offenes Intervall, eine reguläre Kurve der Klasse C^2. Zeige:

(i) α hat genau dann konstante Krümmung κ, wenn sie Teil eines Kreises mit Radius $\frac{1}{|\kappa|}$ ist, falls $\kappa \neq 0$, beziehungsweise Teil einer Geraden, falls $\kappa = 0$.

(ii) Sei $t_0 \in I$ und berühre ein Kreis K mit Radius $\frac{1}{|\kappa|}$ die Kurve α von zweiter Ordnung in t_0, d.h. es gilt $\operatorname{dist}(\alpha(t), K) = o\left((t-t_0)^2\right)$. Dann ist die Absolutkrümmung von α in t_0 gleich $|\kappa|$.

Aufgabe 1.2. Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte reguläre Kurve der Klasse C^3. Gelte $\alpha'' \neq 0$, d.h. α ist eine Frenet-Kurve. Das zugehörige Frenet-3-Bein ist durch $v_1 = c'$, $v_2 = \frac{c''}{|c''|}$ und $v_3 = v_1 \times v_2$ gegeben. Weise nun die Frenet-Gleichungen nach, wobei $\tau := \langle v_2', v_3 \rangle$ die Torsion bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.3.

(i) Eine reguläre Kurve zwischen zwei Punkten $p, q \in \mathbb{R}^n$ mit kleinstmöglicher Länge ist notwendig das Geradenstück von p nach q.

(ii) Seien $x, y \in \mathbb{S}^2$ und definiere

$$d(x,y) := \inf \left\{ L(\alpha) : \alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^2,\ \alpha \text{ stückweise } C^1,\ \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y \right\}.$$

Zeige, dass $d : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ eine Metrik ist. Nehme an die Erdoberfläche sei eine Kugel mit Radius $r = 6{,}371000785 \cdot 10^6$m. Bestimme den Abstand vom Konstanzer Münster ($47°39'48''$ nördlicher Breite, $9°10'34''$ östlicher Länge) zum Nordpol. (Punkte gibt es wie üblich nur für bewiesene Tatsachen.)

Aufgabe 1.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt, $\partial\Omega$ das Bild einer stückweisen C^1-Kurve α.

(i) Ist Ω nicht konvex, so gibt es ein Gebiet Ω' gleichen Umfanges und größeren Flächeninhaltes. Sei daher Ω ab jetzt konvex.

(ii) Sei hier der Rand das Bild mehrerer stückweiser C^1-Kurven. Ist Ω nicht zusammenhängend, so gibt es ein Gebiet Ω' gleichen Umfanges und größeren Flächeninhaltes.

(iii) Sei $\alpha \notin C^1$. Dann gibt es ein Gebiet mit gleichem Umfang und größerem Flächeninhalt.

(iv) Sei $p \in \partial\Omega$. Dann gibt es $q \in \partial\Omega$, $q \neq p$, so dass die Gerade G durch p und q das Gebiet Ω in zwei Gebiete gleichen Flächeninhaltes teilt. Schneidet G den Rand $\partial\Omega$ nicht senkrecht, so gibt es ein Gebiet Ω' gleichen Umfanges und größeren Flächeninhaltes als Ω.

Hinweis: Spiegele einen Teil von Ω an der Flächeninhaltshalbierenden.

Abgabe: Bis Dienstag, 20.04.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.