Oliver Schnürer, Matthias Makowski · Universität Konstanz · Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 10

Aufgabe 10.1. Sei M eine C^{k+1}-Mannigfaltigkeit, $k \geq 1$, mit abzählbarer Basis.

(i) Sei g wie im Beweis von Theorem 9.4 definiert. Zeige, dass g eine Riemannsche Metrik der Klasse C^k ist.
(ii) Zeige, dass ein Zusammenhang der Klasse C^{k-1} auf M existiert.

Aufgabe 10.2. Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und g eine Riemannsche Metrik auf N. Ist $f : M \to N$ eine Immersion, so ist durch

$$f^*g(X, Y) = g(f_*X, f_*Y),$$

wobei X, Y beliebige Vektorfelder auf M seien, eine Riemannsche Metrik auf M definiert.

Aufgabe 10.3. Sei M^n eine n-dimensionale, zusammenhängende, differenzierbare Mannigfaltigkeit, deren Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

(i) Sei g eine pseudo-Riemannsche Metrik auf M, $p \in M$ beliebig und $V_1, \ldots, V_n$ eine Orthonormalbasis von T_pM. Sei $\varepsilon_j := g_p(V_j, V_j)$. Zeige, dass der Index von g mit der Anzahl der negativen Vorzeichen, welche in $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ vorkommen, übereinstimmt.
(ii) Zeige, dass eine Metrik vom Index k, $1 \leq k \leq n$, genau dann existiert, wenn es ein k-dimensionales Unterbündel von TM gibt.

Aufgabe 10.4. Sei M eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ und bezeichne mit R den Krümmungstensor. Berechne R bezüglich des Projektionszusammenhanges für

(1) $M = \mathbb{S}^n$,
(2) $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^k$, $1 \leq k \leq n-1$,
(3) $M = \{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$.

Abgabe: Bis Dienstag, 29.06.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.