Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2010
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 11

Aufgabe 11.1. Sei M eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, g die induzierte Metrik und ∇ der induzierte Zusammenhang. Zeige, dass ∇ der eindeutig bestimmte Levi-Civita Zusammenhang auf (M, g) ist.

Aufgabe 11.2. Seien (M, g), $(N, \tilde{g})$ glatte Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $\varphi : M \to N$ eine Isometrie. Bezeichne mit ∇, $\tilde{\nabla}$ und R, $\tilde{R}$ jeweils den Riemannschen Zusammenhang bzw. die Riemannsche Krümmung auf M bzw. N.

(i) Zeige, dass für glatte Vektorfelder X, Y auf M

$$\varphi_*(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{\varphi_* X}(\varphi_* Y)$$

gilt.

(ii) Zeige, dass für glatte Vektorfelder X, Y, Z auf M

$$\varphi_*(R(X, Y)Z) = \tilde{R}(\varphi_* X, \varphi_* Y)\varphi_* Z$$

gilt.

Aufgabe 11.3. Sei $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Berechne $\varphi^*\delta$, wobei δ die euklidische Metrik des $\mathbb{R}^n$ bezeichne und vergleiche dies mit der Definition 2.1 aus dem Skript.

Aufgabe 11.4. Sei

$$\mathcal{H}^n_R = \{(t, x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t^2 - |x|^2 = R^2,\ t > 0\}$$

und h die von $(\mathbb{R}^{n+1}, m)$ induzierte Metrik, wobei m die Minkowski-Metrik bezeichnet. Dann nennen wir $(\mathcal{H}^n_R, h)$ den hyperbolischen Raum. Ist B^n_R der Ball mit Radius R im $\mathbb{R}^n$ um den Ursprung, so definieren wir weiterhin die Inverse der hyperbolischen stereographischen Projektion:

$$\pi^{-1} : B^n_R \to \mathcal{H}^n_R, \quad \pi^{-1}(y) = (t, x) = \left(R\,\frac{R^2 + |y|^2}{R^2 - |y|^2}, \frac{2R^2 y}{R^2 - |y|^2} \right).$$

Zeige, dass

$$g_{ij}(y) := \left((\pi^{-1})^* h\right)_{ij}(y) = 4\frac{R^4}{(R^2 - |y|^2)^2}\delta_{ij}$$

gilt. (B^n_R, g) bezeichnet man als das Poincaré-Modell des hyperbolischen Raumes.

Abgabe: Bis Dienstag, 06.07.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.