Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 12

Aufgabe 12.1. Seien (M, g) und $(N, \tilde{g})$ glatte Riemannsche Mannigfaltigkeiten und seien $\pi : M \times N \to M$ und $\sigma : M \times N \to N$ die jeweiligen Projektionen.

(i) Zeige, dass durch
$$\bar{g} = \pi^* g \oplus \sigma^* \tilde{g} \equiv \begin{pmatrix} \pi^* g & 0 \\ 0 & \sigma^* \tilde{g} \end{pmatrix}$$
eine Riemannsche Metrik auf $M \times N$ definiert ist.

(ii) Bezeichne mit $R, \tilde{R}, \bar{R}$ den Riemannschen Krümmungstensor auf M, N, sowie $M \times N$. Stelle nun $\bar{R}$ mittels R und $\tilde{R}$ dar.

Aufgabe 12.2. Sei $(\mathcal{H}^n_R, h)$ der hyperbolische Raum, wie in Aufgabe 11.4 definiert. Berechne den Riemannschen Krümmungstensor R_{ijkl}, die Ricci-Krümmung R_{ij}, die Skalarkrümmung R und die Schnittkrümmungen $K(X, Y)$ im Poincaré-Modell des hyperbolischen Raumes.

Aufgabe 12.3. Sei (M, g) eine Einstein-Mannigfaltigkeit, d. h. es existiert eine Funktion $f \in C^\infty(M)$, so dass $R_{ij} = f g_{ij}$ gilt. Sei $\dim M \geq 3$. Zeige, dass
$$R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij}$$
gilt und dass R konstant ist.

Aufgabe 12.4. Seien (M, g) und $(N, \tilde{g})$ glatte Riemannsche Mannigfaltigkeiten und sei $\varphi : M \to N$ ein Diffeomorphismus, mit der Eigenschaft, dass für alle glatten Kurven $\gamma : [0, 1] \to M$
$$L_g(\gamma) = L_{\tilde{g}}(\varphi \circ \gamma)$$
gilt, wobei
$$L_g(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{g(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))}\, \mathrm{ds}$$
ist. Ein Diffeomorphismus mit dieser Eigenschaft wird als Isometrie zwischen M und N bezeichnet. Zeige, dass
$$\varphi^* \tilde{g} = g$$
gilt.

Aufgabe 12.5. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $g = g(t)$ eine Familie von Riemannschen Metriken, welche glatt vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängt und die Ableitung wieder ein Tensor ist. Dies gilt z. B. für den Ricci-Fluss $\dot{g}_{ij} = -2R_{ij}$. Nehme an, dass für $p \in M$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ eine Karte (φ, U) von M existiert, so dass
$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}, \quad \Gamma^k_{ij}(p) = 0$$
gilt, wobei die Größen zur Zeit t_0 ausgewertet werden. Zeige, dass der Riemannsche Krümmungstensor R_{ijkl} in dem oben gewählten Koordinatensystem die Gleichung
$$\begin{aligned} \dot{R}_{ijkl} = &- \frac{1}{2} \left((\dot{g}_{jl})_{,ki} - (\dot{g}_{jk})_{,li} - (\dot{g}_{il})_{,kj} + (\dot{g}_{ik})_{,lj} \right) \\ &+ \frac{1}{2} g^{pq} \left(R_{ijkp}\, \dot{g}_{ql} + R_{ijpl}\, \dot{g}_{qk} \right) \end{aligned}$$
erfüllt, wobei die Größen an der Stelle p und zur Zeit t_0 ausgewertet werden.

Abgabe: Bis Dienstag, 13.07.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.