Oliver Schnürer, Matthias Makowski — Universität Konstanz — Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 2

Aufgabe 2.1. Sei M eine kompakte, sternförmige Hyperfläche der Klasse C^2 im $\mathbb{R}^{n+1}$, d. h. es gibt ein $u \in C^2\left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right)$, ohne Einschränkung positiv homogen vom Grade 1 mit $u > 0$, so dass

$$M = \{(x \cdot u(x)) : x \in \mathbb{S}^n\}$$

gilt. Gib eine lokale Einbettung von M in den $\mathbb{R}^{n+1}$ an und berechne die induzierte Metrik g_{ij}, die zweite Fundamentalform h_{ij} und die Normale ν von M.

Aufgabe 2.2. Berechne die Umlaufzahlen folgender Kurven:

(i) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,
$t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

(ii) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,
$t \mapsto (\sin t, \sin 2t)$.

Aufgabe 2.3.

(i) Sei $Y = \mathbb{R} \cup \{0'\}$. Definiere die Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \to Y$, $x \mapsto x$ und

$$f_2 : \mathbb{R} \to Y, x \mapsto \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 0', & x = 0. \end{cases}$$

Bestimme die Finaltopologie von Y bezüglich $\{f_1, f_2\}$ und untersuche, ob Y hausdorffsch ist oder nicht.

(ii) Seien X, Y topologische Räume. Sei $A \subset X$ und sei Y hausdorffsch. Seien g_1, g_2: $X \to Y$ stetig. Ist $g_1(x) = g_2(x)$ für alle $x \in A$, so folgt $g_1(x) = g_2(x)$ für alle $x \in \bar{A}$.

Aufgabe 2.4.

(i) Zeige, dass die Abbildung $p_1 : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$, $x \to [x]$, eine zweiblättrige Überlagerung ist.

(ii) Gegeben die Überlagerung $p_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $x \mapsto e^{ix}$, und eine stetige Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, sowie $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $p_2(x_0) = \gamma(0)$.
Dann existiert eine Kurve $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = x_0$ und $p_2 \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. $\tilde{\gamma}$ heißt der Lift von γ. Das folgende Diagramm kommutiert also

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p_2"] \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] & \mathbb{S}^1. \end{tikzcd}$$

(iii) Gegeben die Überlagerung $p_3 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, $x \mapsto x^3$, und eine stetige Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, sowie $x_0 \in \mathbb{S}^1$ mit $p_3(x_0) = \gamma(0)$. Zeige wiederum die Existenz eines stetigen Lifts $\tilde{\gamma}$ von γ, diesmal bezüglich p_3. Man erhält nun die Kommutativität des folgenden Diagrammes:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{S}^1 \arrow[d, "p_3"] \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] & \mathbb{S}^1. \end{tikzcd}$$

Abgabe: Bis Dienstag, 27.04.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.