Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 3

Aufgabe 3.1.

(i) Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine affin lineare Funktion, d. h. gelte $u(x) = \langle A, x\rangle + b$, wobei $A \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$ sind. Es bezeichne $\mathcal{A}(\Omega)$ den Flächeninhalt von graph $u \cap (\Omega \times \mathbb{R})$. Zeige für ein geschickt gewähltes Rechteck R, dass

$$\mathcal{A}(R) = \int\limits_R \sqrt{1 + |Du|^2}\,\mathrm{dx}$$

gilt. Definiere daher $\mathrm{d}\mu := \sqrt{1 + |Du|^2}\,\mathrm{dx} \equiv \sqrt{\det(g_{ij})}\,\mathrm{dx}$ und $\mathcal{A}(\Omega) := \int\limits_\Omega \mathrm{d}\mu$.

(ii) Gib $\mathrm{d}\mu$ für eine untere Hemisphäre

$$\mathbb{S}^n_{R,-} := \mathbb{S}^n_R \cap \left\{x^{n+1} < 0\right\} = \left\{\left(\hat{x}, x^{n+1}\right) \in \mathbb{R}^{n+1} : |\hat{x}|^2 + (x^{n+1})^2 = R^2,\, x^{n+1} < 0\right\}$$

an. Im Fall der Sphäre schreiben wir $\mathrm{d}\sigma \equiv \mathrm{d}\mu$.

Aufgabe 3.2. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, die sich als Graph schreiben lässt, $M = \operatorname{graph} u_{|\Omega}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, mit $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Definiere für eine nichtnegative, stetige Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

$$\int_M f\,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega f(x, u(x))\sqrt{1 + |Du|^2}\,\mathrm{dx} \equiv \int_\Omega f(x, u(x))\,\mathrm{d}\mu.$$

Für eine stetige Funktion $f = f^+ + f^-$, wobei $f^+ := \max(f, 0)$ und $f^- = \min(f, 0)$, für die sowohl $\int\limits_M f^+\,\mathrm{d}\mu$, als auch $\int\limits_M (-f^-)\,\mathrm{d}\mu$ endlich ist, definieren wir $\int\limits_M f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_M f^+\,\mathrm{d}\mu - \int\limits_M (-f^-)\,\mathrm{d}\mu$. Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $M = \operatorname{graph} u_{|\Omega}$, $u \in C^2(\bar{\Omega})$ mit $D^2u > 0$. Zeige, dass

$$\int\limits_M K\mathrm{d}\mu = \int\limits_{\nu(M)} \mathrm{d}\sigma$$

ist, wobei $\nu : M \to \mathbb{S}^n$ der nach unten gerichtete Normalenvektor an M ist und $\nu(M) := \{p \in \mathbb{S}^n : \nu(q) = p \text{ für ein } q \in M\}$.

Hinweis: Verwende die Transformationsregel für Integrale und benutze ν um den Diffeomorphismus zu konstruieren.

Aufgabe 3.3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Sei $\varphi \in C^2_c(\Omega)$. Berechne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathcal{A}(\operatorname{graph}\,(u + t\varphi))_{|t=0} =: \delta\mathcal{A}[u]\langle\varphi\rangle.$$

Sei nun u ein kritischer Punkt des Oberflächenfunktionals, d.h. gelte $\delta\mathcal{A}[u]\langle\varphi\rangle = 0$ für alle $\varphi \in C^2_c(\Omega)$. Dann heißt graph u Minimalfläche. Zeige, dass

$$H[\operatorname{graph}\, u] = 0$$

gilt.

Aufgabe 3.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in C^2(\bar{\Omega})$ und gelte $H[\operatorname{graph}\, u] = 0$. Zeige, dass für alle $\varphi \in C^2_c(\Omega)$

$$\mathcal{A}[u] \le \mathcal{A}[u + \varphi]$$

gilt.

Hinweis: Wende den Gaußschen Divergenzsatz auf eine geeignete Fortsetzung eines Normalenvektors an. Begründe auch, wieso der Divergenzsatz anwendbar ist.

Abgabe: Bis Dienstag, 04.05.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.