

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG DIFFERENTIALGEOMETRIE I

Blatt 4

**Aufgabe 4.1.** Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $x \in M$ . Zeige, dass die Vektorraumstruktur von  $T_x M$  nicht von der Wahl der Karte abhängt.

**Aufgabe 4.2.** Sei  $Z = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ .

- (i) Zeige, dass  $Z$  eine differenzierbare ( $C^\infty$ ) Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist. Wir versehen nun  $Z$  mit dieser differenzierbaren Struktur.
- (ii) Sei  $u : Z \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $u \in C^2(Z)$ . Sei  $M$  ein Graph über  $Z$ , d.h. es gilt

$$M = \{(u(x, y) \cdot x, y) : (x, y) \in Z\}.$$

Gib eine lokale Einbettung von  $M$  an und berechne die von der Einbettung induzierte Metrik, die äußere Normale, sowie die zweite Fundamentalform.

- (iii) Sei nun  $u$  rotationssymmetrisch, gelte also  $u(x, y) = u(y)$ . Berechne nun die mittlere Krümmung  $H$ .

**Aufgabe 4.3.**

- (i) Sei  $N \in \mathbb{S}^n$  der Nordpol. Wir definieren nun eine Abbildung

$$\varphi^N : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

indem wir einem Punkt  $x \in \mathbb{S}^n$  den Schnittpunkt der  $N$  und  $x$  verbindenden Geraden mit der Ebene  $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n \times \{0\}$  zuweisen. Analog definieren wir  $\varphi^S : \mathbb{S}^n \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei nun  $S$  den Südpol bezeichnet. Zeige nun, dass  $\varphi^N$  und  $\varphi^S$  Karten eines Atlanten von  $\mathbb{S}^n$  sind.

- (ii) Gib eine weitere Auswahl an Karten an, mit welcher  $\mathbb{S}^n$  zu einer Mannigfaltigkeit wird.

**Aufgabe 4.4.** Sei  $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$  eine  $m$ -dimensionale, kompakte Untermannigfaltigkeit. Zeige, dass es einen Punkt  $p \in M^m$  mit  $h_{ij}(p) > 0$  gibt.

*Zusatz:* Bezeichnet  $\text{diam } M^m$  den Durchmesser von  $M^m$  in  $\mathbb{R}^{m+1}$ , so gibt es  $p \in M^m$ , so dass  $h_{ij}(p) \geq \frac{1}{\text{diam } M^m} g_{ij}$  gilt.

**Abgabe:** Bis Dienstag, 18.05.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.