Oliver Schnürer, Matthias Makowski | Universität Konstanz | Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 5

Aufgabe 5.1. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine eingebettete Mannigfaltigkeit mit lokaler Einbettung $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. Seien mit üblicher Bezeichnungsweise $g_{ij}, h_{ij}, \nu, H, K, \sqrt{\det(g_{ij})}\,\mathrm{dx}$ gegeben.

Definiere $\tilde{X} = \mu \cdot X$, wobei $\mu > 0$ eine Konstante sei. Bestimme oben genannte Größen für die neue Einbettung mit Hilfe von μ und den entsprechenden Größen für X.

Aufgabe 5.2. Beweise Bemerkung 5.13. Verwende alternativ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} (1, x) & \text{für } -1 < x \le 0, \\ (\cos x, \sin x) & \text{für } 0 < x < 2\pi. \end{cases}$$

Aufgabe 5.3.

(i) Seien M, N, S differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$, sowie $g : N \to S$ differenzierbare Abbildungen. Zeige:
$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_*.$$

(ii) Sei M eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von N. Zeige, dass TM eine Untermannigfaltigkeit von TN ist.

Aufgabe 5.4.

(i) Sei $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\sim$, wobei die Äquivalenzrelation als
$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists\, z \in \mathbb{Z}^n : x = y + z$$
definiert ist. Zeige, dass $\mathbb{T}^n$ versehen mit der Quotientenraumtopologie bezüglich der Projektion
$$p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n, \quad p(x) = [x],$$
kompakt ist. Gib einen Atlas für $\mathbb{T}^n$ an, so dass p ein lokaler Diffeomorphismus wird.

(ii) Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : \mathrm{dist}(x, \mathbb{S}^1 \times \{0\}) = \frac{1}{4}\}$. Zeige, dass M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

(iii) Weise nach, dass $\mathbb{T}^2$ und M diffeomorph sind.

Abgabe: Bis Dienstag, 25.05.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.