Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 6

Aufgabe 6.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Zeige, dass die Projektion
$$\pi : \operatorname{graph} u \to \Omega, \quad (x, u(x)) \mapsto x,$$
ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 6.2. Sei $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeige, dass $\operatorname{graph} u \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $m \in \mathbb{N}_+$, eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 6.3. Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit G versehen mit einer Gruppenstruktur, so dass die Multiplikation $m : G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$, sowie die Inversion $i : G \to G$, $a \mapsto a^{-1}$, differenzierbar sind, bezeichnet man als *Lie-Gruppe*.

Es bezeichne $O(n)$ den Raum der orthogonalen $n \times n$-Matrizen. Zeige, dass $O(n)$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist, und dass die Gruppenoperationen differenzierbar sind. Gib des Weiteren $T_{\mathbb{1}}O(n)$ an, wobei $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.

Aufgabe 6.4. Gib zwei nicht homöomorphe $\mathbb{R}$-Bündel über $\mathbb{S}^1$ an.

Abgabe: Bis Dienstag, 01.06.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.