Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2010
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 8

Aufgabe 8.1. Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und sei $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus. Zeige, dass $f_* : TM \to TN$ ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 8.2. Seien M, N differenzierbare C^∞-Mannigfaltigkeiten und sei $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus. Seien X, Y zwei C^1-Vektorfelder auf M und definiere für $q \in N$ ein Vektorfeld auf N mittels

$$\hat{X}|_q = (f_* X)|_{f^{-1}(q)}.$$

Zeige, dass für $p \in M$

$$f_{*,p}[X, Y]|_p = \left[\hat{X}, \hat{Y}\right]\big|_{f(p)}$$

gilt.

Aufgabe 8.3. Sei N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. N heißt orientierbar, wenn es eine Familie von Karten von N gibt, deren Definitionsbereiche N überdecken, so dass die Determinante der Jacobi-Matrix der Kartenwechsel stets positiv ist.

Sei nun $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Untermannigfaltigkeit. Wir sagen, dass M als Hyperfläche orientierbar ist, wenn es eine stetige Normale auf M gibt, d. h. es existiert eine stetige Abbildung $\nu : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, so dass für $p \in M$ der Vektor $\nu(p) \in (T_p M)^\perp$ ist und $|\nu(p)| = 1$ erfüllt.

Zeige, dass M genau dann orientierbar ist, wenn es als Hyperfläche orientierbar ist.

Aufgabe 8.4. Sei $f : B_1^m(0) \to \mathbb{R}^{m+k}$ eine differenzierbare C^∞-Einbettung, wobei $B_1^m(0)$ den offenen Einheitsball in $\mathbb{R}^m$ darstellt. Bezeichne weiterhin mit M die Untermannigfaltigkeit $f(B_1^m(0)) \subset \mathbb{R}^{m+k}$.

Zeige, dass es k glatte Abbildungen $N_i : B_1^m(0) \to \mathbb{R}^{m+k}$, $1 \le i \le k$, gibt, so dass für $p \in B_1^m(0)$ die Vektoren $N_i(p) \in (T_{f(p)} M)^\perp$ sind und

$$\langle N_i(p), N_j(p) \rangle = \delta_{ij},\ 1 \le i, j \le k,$$

erfüllen. Zeige, dass die Abbildung

$$F : B_1^m(0) \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{m+k}, \quad (x, y) \mapsto f(x) + y^i N_i(x)$$

ein Diffeomorphismus in einer Umgebung von $(0, 0)$ ist.

Abgabe: Bis Dienstag, 15.06.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.