Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 9

Aufgabe 9.1. Sei M eine C^{k+1}-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $k \geq 1$. Seien X, Y beliebige Vektorfelder der Klasse C^{k-1} respektive C^k auf M, wobei wir Y als Abbildung $Y : M \to \mathbb{R}^n$ auffassen. Definiere wie in Beispiel 8.2

$$\nabla_X Y(z) := P(z) dY(z)\langle X\rangle,$$

wobei $P(z) : \mathbb{R}^n \to T_z M$ die orthogonale Projektion ist, $z \in M$ beliebig sei und wir Y lokal fortsetzen zu einer Abbildung $Y : U \to \mathbb{R}^n$, U eine offene Umgebung von z des $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass ∇ einen Zusammenhang der Klasse C^{k-1} auf M definiert, den induzierten Zusammenhang.

Aufgabe 9.2. Versehe $\mathbb{S}^n$ mit dem induzierten Zusammenhang ∇.

(i) Sei X durch
$$X(p) := e_1 - \langle e_1, p\rangle\, p$$
definiert, wobei e_1 den Basisvektor im $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnet und $p \in S^n$ sei. Begründe, warum X ein Vektorfeld auf $\mathbb{S}^n$ ist und berechne die Darstellung von X bezüglich der stereographischen Projektion.

(ii) Berechne die Christoffelymbole Γ^k_{ij} in lokalen Koordinaten bezüglich der stereographischen Projektion.

Aufgabe 9.3. Lies den Beweis von Bemerkung 9.5, also der Existenz einer untegeordneten Zerlegung der Eins auf einer parakompakten Mannigfaltigkeit, nach.

Aufgabe 9.4. Sei X ein glattes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit M. Bezeichne mit $F : W \to M$ den maximalen Fluss von X. Zeige, dass $\forall t \in \mathbb{R}$ $M_t := \{x \in M : (x, t) \in W\}$ offen in M ist und dass $F(t, \cdot) : M_t \to M_{-t}$ ein Diffeomorphismus ist.

Abgabe: Bis Dienstag, 22.06.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.