Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2013/2014
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie 1

Blatt 1

Aufgabe 1.1. (4 Punkte)
Seien $p \neq q \in \mathbb{R}$, $v, w \in \mathbb{S}^1$. Definiere für $t \in \mathbb{R}$

$$d(t) := |(p + tv) - (q + tw)|.$$

Unter welchen geometrischen Bedingungen ist d für t nahe Null strikt wachsend, strikt fallend oder konstant?

Aufgabe 1.2. (4 Punkte)
Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^1-Kurve, d. h. gelte $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann „lässt sich die Kurve lokal als Graph darstellen".

(i) Präzisiere die Formulierung und beweise die Aussage.
(ii) Ist γ zusätzlich injektiv und periodisch, so funktioniert die Darstellbarkeit auch lokal um Punkte im Bild. Präzisiere dies ebenfalls und beweise es.

Aufgabe 1.3. (4 Punkte)
Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge, so dass zu je zwei Punkten $p, q \in X$ eine stückweise C^1-Kurve $\gamma : [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$ existiert. Für $p, q \in X$ bezeichnen wir die Menge dieser Verbindungskurven mit $\Gamma(p, q)$.

Definiere

$$d \colon X \times X \to \mathbb{R}$$

durch

$$d(p, q) := \inf_{\gamma \in \Gamma(p,q)} L(\gamma),$$

wobei

$$L(\gamma) := \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt$$

die Länge von γ bezeichnet. d heißt geodätischer Abstand.

Zeige

(i) (X, d) ist ein metrischer Raum.
(ii) Es gibt $X \subset \mathbb{R}^n$ und p, $q \in X$, so dass das Infimum nicht angenommen wird.

Aufgabe 1.4. (4 Punkte)
Sei $X = \mathbb{R}^2$ und d wie in Aufgabe 1.3 der geodätische Abstand. Zeige, dass d mit dem euklidischen Abstand übereinstimmt.

Hinweis: Zeige, dass sich jede Verbindungskurve von p nach $q \neq p$ längenvermindernd oder längenerhaltend zunächst zu einer Verbindungskurve auf der Geraden durch p und q und dann auf dem Geradensegment zwischen p und q deformieren lässt.

Abgabe: Bis Mittwoch, 30.10.2013, 10:00 Uhr, in der Vorlesung.