Oliver Schnürer, Matthias Makowski | Universität Konstanz | Wintersemester 2013/2014

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie 1

Blatt 2

Aufgabe 2.1. (6 Punkte)

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, I ein offenes Intervall, eine reguläre Kurve der Klasse C^2. Zeige:

(i) α hat genau dann konstante Krümmung κ, wenn sie Teil eines Kreises mit Radius $\frac{1}{|\kappa|}$ ist, falls $\kappa \neq 0$, beziehungsweise Teil einer Geraden, falls $\kappa = 0$.

(ii) Sei $t_0 \in I$ und berühre ein Kreis K mit Radius $\frac{1}{|\kappa|}$ die Kurve α von zweiter Ordnung in t_0, d.h. es gilt $\operatorname{dist}(\alpha(t), K) = o\left((t-t_0)^2\right)$. Dann ist die Absolutkrümmung von α in t_0 gleich $|\kappa|$.

Aufgabe 2.2. (4 Punkte)

(i) Sei $t \mapsto A(t)$ eine differenzierbar von $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ abhängige Familie von orthogonalen Matrizen, d. h. es gelte $A(t) \in O(n)$ für alle t. Gelte weiterhin $A(0) = I$, wobei I die Einheitsmatrix bezeichne. Zeige, dass $\frac{d}{dt}A(t)$ an der Stelle $t = t_0$ schiefsymmetrisch ist.

(ii) Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte reguläre Kurve der Klasse C^3. Gelte $\alpha'' \neq 0$, d.h. α ist eine Frenet-Kurve. Das zugehörige Frenet-3-Bein ist durch $v_1 = \alpha'$, $v_2 = \frac{\alpha''}{|\alpha''|}$ und $v_3 = v_1 \times v_2$ gegeben. Weise nun die Frenet-Gleichungen nach, wobei $\tau := \langle v_2', v_3 \rangle$ die Torsion bezeichnet:
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.3. (6 Punkte)

Angenommen, die Erdoberfläche sei eine Sphäre mit Radius 6371 km. Bestimme den geodätischen Abstand vom Konstanzer Münster (47,66353° nördliche Breite, 9,17502° östliche Länge) zum Pariser Eiffelturm (48,85823° nördliche Breite, 2,29439° östliche Länge).
Hinweis: Rotiere zunächst, so dass einer der beiden Punkte zum Nordpol wird und argumentiere dann analog zu Aufgabe 4 von Blatt 1, dass der geodätische Abstand die Länge des direkt nach Norden führenden Weges ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, 06.11.2013, 10:00 Uhr, in der Vorlesung.