

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG DIFFERENTIALGEOMETRIE 1

Blatt 3

**Aufgabe 3.1.** (6 Punkte)

Angenommen, die Erdoberfläche sei eine Kugel mit Radius 6371 km. Bestimme den geodätischen Abstand vom Konstanzer Münster ( $47,66353^\circ$  nördliche Breite,  $9,17502^\circ$  östliche Länge) zum Pariser Eiffelturm ( $48,85823^\circ$  nördliche Breite,  $2,29439^\circ$  östliche Länge).

*Hinweis:* Rotiere zunächst, so dass einer der beiden Punkte zum Nordpol wird und argumentiere dann analog zu Aufgabe 4 von Blatt 1, dass der geodätische Abstand die Länge des direkt nach Norden führenden Weges ist.

**Aufgabe 3.2.** (4 Punkte)

- (i) Zeige, dass die Metrik einer immersierten Hyperfläche positiv definit ist.
- (ii) Zeige, dass eine  $n$ -dimensionale Hyperfläche in jedem Punkt  $n$  Hauptkrümmungen besitzt.

**Aufgabe 3.3.** (4 Punkte)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  eine immersierte Hyperfläche. Sei  $0 \in \Omega$ . Zeige, dass es eine offene Menge  $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$  und einen Diffeomorphismus  $\psi : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$  mit  $\psi(0) = 0$  gibt, so dass die Metrik  $\hat{g}_{ij}$  und die zweite Fundamentalform  $\hat{h}_{ij}$  von  $\hat{X} := X \circ \psi$  Folgendes erfüllen:  $\hat{g}_{ij}(0) = \delta_{ij}$  und  $\hat{h}_{ij}(0)$  ist diagonal.

**Aufgabe 3.4.** (4 Punkte)

Für eine  $n$ -dimensionale Hyperfläche gilt

$$\frac{1}{n}H = \frac{1}{\mu(\{\xi \in \mathbb{R}^n : g(\xi, \xi) = 1\})} \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^n : g(\xi, \xi) = 1\}} h_{ij} \xi^i \xi^j d\mu(\xi),$$

wobei  $d\mu(\xi) = \sqrt{\det(g_{ij})}d\xi$  das Volumenelement der Hyperfläche ist.

*Hinweis:* Überprüfe zunächst die Invarianz der rechten Seite unter Koordinatentransformationen. Wähle dann ein Koordinatensystem wie in Aufgabe 3.3. Betrachte dann die Fälle  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$  und  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$  oder verwende den Gaußschen Divergenz-  
satz.

**Abgabe:** Bis Montag, 11.11.2013, 10:00 Uhr, in der Vorlesung.