Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2013/2014

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 4

Aufgabe 4.1. (4 Punkte)
Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine eingebettete Mannigfaltigkeit mit lokaler Einbettung $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. Seien mit üblicher Bezeichnungsweise $g_{ij}, h_{ij}, \nu, H, K, \sqrt{\det(g_{ij})}dx$ gegeben.

Definiere $\tilde{X} = \mu \cdot X$ wobei $\mu > 0$ eine Konstante sei. Bestimme die oben genannten Größen für die neue Einbettung mit Hilfe von μ und den entsprechenden Größen für X.

Aufgabe 4.2. (4 Punkte)
Sei $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ eine m-dimensionale, kompakte Untermannigfaltigkeit. Zeige, dass es einen Punkt $p \in M^m$ mit $h_{ij}(p) > 0$ gibt.
Zusatz: Bezeichnet $\operatorname{diam} M^m$ den Durchmesser von M^m in $\mathbb{R}^{m+1}$, so gibt es $p \in M^m$, so dass $h_{ij}(p) \ge \frac{1}{\operatorname{diam} M^m} g_{ij}$ gilt.

Aufgabe 4.3. (4 Punkte)
Definiere $u : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^2 \to \mathbb{R}$ durch $u(x, y) = \log\cos x - \log\cos y$.
Bestimme für $X(x, y) := (x, y, u(x, y))$
die Normale ν, die Metrik g_{ij} und ihre Inverse g^{ij}, die zweite Fundamentalform h_{ij},
die mittlere Krümmung H und das Vorzeichen der Gaußkrümmung K.
Skizziere graph u.

Aufgabe 4.4. (4 Punkte)

(i) Sei X ein topologischer Raum. Nehme an, dass $A \subset X$ und $B \subset X$ die induzierte Topologie oder Unterraumtopologie tragen. Gelte $X = A \cup B$. Sei M eine Menge mit $M \subset A \cap B$. Ist $M \subset A \cap B$ offen (abgeschlossen) in A und in B, so ist M auch offen (abgeschlossen) in X.
(ii) Stetige Bilder überdeckungskompakter Mengen sind überdeckungskompakt.
(iii) Führe Beispiel 3.6 (i) aus.

Abgabe:
Bis Montag, 18.11.2013, 15:15 Uhr, in der Vorlesung.