Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2013/2014

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 5

Aufgabe 5.1. (4 Punkte)
Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) mit der metrischen Topologie. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) f ist stetig, d. h. Urbilder offener Mengen sind offen.

(ii) $f^{-1}(B)$ ist für alle abgeschlossenen Mengen $B \subset Y$ abgeschlossen.

(iii) $\forall x_0 \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; \forall x \in X : d_X(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

(iv) Für alle $x_0 \in X$ und alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $x_n \to x$ folgt $f(x_n) \to f(x)$.

Aufgabe 5.2. (4 Punkte)
Seien X und Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Sei $(A_i)_{i\in I}$ ein System von abgeschlossenen Teilmengen von X, die eine lokal endliche Überdeckung von X bilden, d. h. es gilt:

(i) Jedes A_i, $i \in I$, ist abgeschlossen.

(ii) $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = X$, d. h. X ist die Vereinigung der Mengen A_i.

(iii) Zu jedem $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U(x)$, so dass $U(x)$ nur mit endlich vielen A_i's einen nichtleeren Schnitt hat, also $\{i \in I : A_i \cap U(x) \neq \emptyset\}$ endlich ist, d. h. die Vereinigung ist lokal endlich.

Dann gilt: Sind alle Abbildungen $f|_{A_i} : A_i \to Y$ stetig, so ist auch $f : X \to Y$ stetig. (Die Umkehrung gilt ebenfalls.)

Aufgabe 5.3. (2 Punkte)
Bestimme die Hauptkrümmungen von $\mathbb{S}^{n-k} \times \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Aufgabe 5.4. (6 Punkte)
Zeige, dass kein ganzer Graph einer Funktion $u \in C^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ existiert, dessen Hauptkrümmungen überall $\lambda_i \geq \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ erfüllen.
Hinweis: Berühre graph u mit einer großen Sphäre von oben.

Abgabe:
Bis Montag, 25.11.2013, 10:00 Uhr, in der Vorlesung