Oliver Schnürer, Matthias Makowski — Universität Konstanz — Wintersemester 2013/2014

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 6

Aufgabe 6.1. (4 Punkte)

(i) Bestimme die Hauptkrümmungen der Immersion $X:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ mit
$$x\mapsto\left(\frac{4x}{|x|^2+4},\frac{|x|^2-4}{|x|^2+4}\right).$$

(ii) Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Sei $X:\Omega\to\mathbb{R}^{n+1}$ eine Immersion. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:
(a) Es gibt $\lambda\in\mathbb{R}$ mit $h_{ij}=\lambda g_{ij}$.
(b) $\operatorname{im} X$ ist in einer Sphäre oder Ebene enthalten.

Aufgabe 6.2. (4 Punkte)
Sei $X:\Omega\to\mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte Hyperfläche. Sei $0\in\Omega$. Sei $\xi\in\mathbb{R}^n$.

(i) Zeige, dass es eine Kurve $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\Omega$ mit $\alpha(0)=0$ und $\alpha'(0)=\xi$ gibt, so dass $\operatorname{im} X\circ\alpha\subset\left\langle\nu(0),X_i(0)\,\xi^i\right\rangle$ gilt.

(ii) Zeige, dass die Beträge der Krümmung von $X\circ\alpha$ und von $\frac{h_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ij}\xi^i\xi^j}$ im Ursprung übereinstimmen.

Aufgabe 6.3. (4 Punkte)
Eine Menge $M^k\subset\mathbb{R}^n$ heißt eine k-dimensionale eingebettete Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, falls es für jeden Punkt $p\in M^k$ eine Umgebung U von p, eine offene Menge $\Omega\subset\mathbb{R}^k$ mit $0\in\Omega$ und eine Immersion $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ mit $X(0)=p$ und $\operatorname{im} X\cap U=M^k\cap U$ gibt.
Seien M^k und N^l zwei nichtleere disjunkte kompakte k- bzw. l-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es $p\in M^k$ und $q\in N^l$ mit $|p-q|=\operatorname{dist}\left(M^k,N^l\right)$. Weiterhin steht die Gerade durch p und q senkrecht auf M^k (und N^l), d. h. für alle C^1-Kurven $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M^k\subset\mathbb{R}^n$ mit $\alpha(0)=p$ gilt $\langle\alpha'(0),p-q\rangle=0$.

Aufgabe 6.4. (4 Punkte)
Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen. Sei $X:\Omega\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^{n+1}$ eine C^2-Abbildung. Sei $X(\cdot,0)$ eine Immersion.

(i) Sei $\Omega'\Subset\Omega$ offen. Zeige, dass es ein $\delta>0$ gibt, so dass $X(\cdot,t):\Omega'\to\mathbb{R}^{n+1}$ für alle $|t|<\delta$ ebenfalls eine Immersion ist.

(ii) Sei nun $X(\cdot,t)$ für alle $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ eine Immersion.
Nehme an, dass es ein $F:\Omega\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}$ mit $\frac{\partial}{\partial t}X=-F\nu$ gibt.
Zeige, dass dann
$$\frac{\partial}{\partial t}g_{ij}=-2Fh_{ij}$$
gilt.

Abgabe:
Bis Montag, 02.12.2013, 10:00 Uhr, in der Vorlesung