Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2013/2014

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 7

Aufgabe 7.1. (5 Punkte)
Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte Hyperfläche.
Definiere

$$\Gamma^k_{ij} := \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{lj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{li} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right) \equiv \frac{1}{2} g^{kl} \left(g_{lj,i} + g_{li,j} - g_{ij,l} \right),$$

$$R_{ij}{}^l{}_k := \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^l_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{im} \Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm} \Gamma^m_{ik}$$

und

$$R_{ijkl} := g_{km} R_{ij}{}^m{}_l.$$

Dann gilt

$$R_{ijkl} = h_{ik} h_{jl} - h_{il} h_{jk}.$$

Aufgabe 7.2. (6 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Sei $\varphi \in C^2_c(\Omega)$. Dann definieren wir den Flächeninhalt von graph u durch

$$A(\operatorname{graph} u) := \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2}\, dx = \int_\Omega \sqrt{\det g_{ij}}\, dx.$$

(i) Wir definieren die erste Variation des Flächeninhalts in Richtung φ durch

$$\frac{d}{dt} A(\operatorname{graph}(u + t\varphi))\,|_{t=0} =: \delta A[u]\langle\varphi\rangle$$

Ist $\delta A[u]\langle\varphi\rangle = 0$ für alle $\varphi \in C^2_c(\Omega)$, so ist u bzw. graph u ein kritischer Punkt des Oberflächenfunktionals und heißt Minimalfläche.
Zeige, dass eine Minimalfläche $H = 0$ erfüllt.

(ii) Gelte $H = 0$. Dann folgt für alle $\varphi \in C^2_c(\Omega)$

$$A[u] \le A[u + \varphi].$$

Hinweis: Wende den Gaußschen Divergenzsatz auf eine geeignete Fortsetzung des Normalenvektors an.

Aufgabe 7.3. (3 Punkte)
Sei M eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von N. Zeige, dass TM eine Untermannigfaltigkeit von TN ist.

Aufgabe 7.4. (2 Punkte)
Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und sei $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus. Zeige, dass $f_* : TM \to TN$ ein Diffeomorphismus ist.

Abgabe:
Bis Montag, 09.12.2013, 10:00 Uhr, in der Vorlesung