Oliver Schnürer, Matthias Makowski

Universität Konstanz

Wintersemester 2013/2014

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 8

Aufgabe 8.1. (4 Punkte)
Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit G versehen mit einer Gruppenstruktur, so dass die Multiplikation $m : G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$, sowie die Inversion $i : G \to G$, $a \mapsto a^{-1}$, differenzierbar sind, bezeichnet man als *Lie-Gruppe*.

Es bezeichne $O(n)$ den Raum der orthogonalen $n \times n$-Matrizen. Zeige, dass $O(n)$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist, und dass die Gruppenoperationen differenzierbar sind. Gib des Weiteren $T_{\mathrm{Id}}O(n)$ an, wobei Id die Einheitsmatrix bezeichnet.

Aufgabe 8.2. (4 Punkte)
Zeige, dass das Vektorbündel $T\mathbb{S}^3$ trivial ist.

Aufgabe 8.3. (4 Punkte)
Seien $M_1, \ldots, M_k$ glatte Mannigfaltigkeiten und sei $\pi_j \colon M_1 \times \ldots \times M_k \to M_j$ die Projektion auf den j-ten Faktor. Seien $p_i \in M_i$ beliebig.
Zeige, dass

$$\alpha : T_{(p_1,\ldots,p_k)}(M_1 \times \ldots \times M_k) \to T_{p_1}M_1 \oplus \ldots \oplus T_{p_k}M_k$$

mit

$$\alpha(X) = (\pi_{1*}X, \ldots, \pi_{k*}X)$$

ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 8.4. (4 Punkte)
Sei M eine glatte kompakte Mannigfaltigkeit. Zeige, dass es für kein $k > 0$ eine Submersion

$$F : M \to \mathbb{R}^k$$

gibt.

Abgabe:
Bis Montag, 16.12.2013, 10:00 Uhr, in der Vorlesung