Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2013/2014

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 10

Aufgabe 10.1. (4 Punkte)
Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Sei $\pi_1(M)$ trivial, d. h. jede stetige Abbildung $\mathbb{S}^1 \to M$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung oder, äquivalent dazu, jede stetige Abbildung $\mathbb{S}^1 \to M$ lässt sich zu einer stetigen Abbildung $\overline{B_1^2(0)} \to M$ fortsetzen.

Zeige, dass dann ein beliebiges $\mathbb{R}$-Bündel über M trivial ist.

Aufgabe 10.2. (4 Punkte)
Sei M eine differenzierbare C^∞-Mannigfaltigkeit und seien X, Y, Z drei C^2-Vektorfelder. Dann gilt die Jacobiidentität

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Aufgabe 10.3. (4 Punkte)
Sei X ein glattes Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M.

(i) Zeige, dass der maximale Fluss F von X auf ganz $M \times \mathbb{R}$ definiert ist.
(ii) Zeige, dass $F(\cdot, t)$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus von M ist.

Aufgabe 10.4. (4 Punkte)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte kompakte Untermannigfaltigkeit. Sei $X\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ glatt. Sei X entlang M tangential, d. h. zu $p \in M$ gibt es eine glatte Kurve $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha'(0) = X(p)$. Sei F der maximale Fluss von X in $\mathbb{R}^n$.

(i) Zeige, dass für beliebige $(p, t) \in M \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ auch $F(p, t) \in M$ gilt (falls F dort definiert ist), d. h. der Fluss von X bleibt in M.
(ii) Fasse X vermöge $X(p) \mapsto [\alpha] \equiv Y(p) \in T_pM$ als Schnitt im Tangentialbündel TM der abstrakten Mannigfaltigkeit M bzw. als Vektorfeld auf M auf. Sei Φ der zugehörige maximale Fluss von Y auf M.
Vergleiche $F|_{M\times\mathbb{R}}$ und Φ.

Abgabe:
Bis Montag, 13.01.2014, 10:00 Uhr, in der Vorlesung