Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2013/2014

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 12

Aufgabe 12.1. (2 Punkte)
Zeige für den "push-forward" von Tensoren für Vektorraumisomorphismen $\varphi\colon E \to F$ und $\psi\colon F \to G$:

(i) $(\psi \circ \varphi)_\# = \psi_\# \circ \varphi_\#$
(ii) $\mathrm{Id}_\# = \mathrm{Id}$
(iii) $(\varphi_\#)^{-1} = \left(\varphi^{-1}\right)_\#$
(iv) $\varphi_\#$ ist ein Isomorphismus

Aufgabe 12.2. (4 Punkte)
Seien M, N differenzierbare C^∞-Mannigfaltigkeiten und sei $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus. Seien X, Y zwei C^1-Vektorfelder auf M und definiere für $q \in N$ ein Vektorfeld auf N mittels

$$\hat{X}|_q = (f_* X)|_{f^{-1}(q)}.$$

Zeige, dass für $p \in M$

$$f_{*,p}[X, Y]|_p = \left[\hat{X}, \hat{Y}\right]\Big|_{f(p)}$$

gilt.

Aufgabe 12.3. (4 Punkte)
Sei M eine C^{k+1}-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $k \geq 1$. Seien X, Y beliebige Vektorfelder der Klasse C^{k-1} respektive C^k auf M, wobei wir Y als Abbildung $Y : M \to \mathbb{R}^n$ auffassen. Definiere wie in Beispiel 8.2

$$\nabla_X Y(z) := P(z) dY(z)\langle X\rangle,$$

wobei $P(z) : \mathbb{R}^n \to T_z M$ die orthogonale Projektion ist, $z \in M$ beliebig sei und wir Y lokal zu einer Abbildung $Y : U \to \mathbb{R}^n$ fortsetzen, wobei U eine offene Umgebung von z des $\mathbb{R}^n$ ist. Zeige, dass ∇ einen Zusammenhang der Klasse C^{k-1} auf M definiert, den sogenannten induzierten Zusammenhang.

Aufgabe 12.4. (6 Punkte)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^2-Untermannigfaltigkeit. Wir hatten auf zwei verschiedene Arten Christoffelsymbole definiert, nämlich durch

(i) $\tilde{\Gamma}^i_{jk} := g^{il}\left(g_{jl,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l}\right)$, wobei wir die Metriken mit Hilfe einer lokalen Einbettung bestimmt haben und durch
(ii) $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$.

Wähle (naheliegende) geeignete Basisvektorfelder und zeige, dass die beiden Definitionen übereinstimmen.

Abgabe: Bis Montag, 27.01.2014, 10:00 Uhr, in der Vorlesung.