Oliver Schnürer, Matthias Makowski — Universität Konstanz — Wintersemester 2013/2014

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 13

Aufgabe 13.1. (4 Punkte)
Seien $\nabla = \nabla^1$ und ∇^2 zwei Zusammenhänge auf einer glatten Mannigfaltigkeit M. Definiere

$$A(X,Y) := \nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y.$$

(i) Zeige, dass A ein $(1,2)$-Tensor ist.
(ii) Sei B ein beliebiger $(1,2)$-Tensor. Zeige, dass

$$(X,Y) \mapsto \nabla_X Y + A(X,Y)$$

ebenfalls ein Zusammenhang auf M ist.
Es folgt, dass jeder Zusammenhang auf M von dieser Form ist.

Aufgabe 13.2. (8 Punkte)
Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.

(i) Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von M. Zeige, dass es eine lokal endliche Verfeinerung und eine dieser Verfeinerung untergeordnete glatte Zerlegung der Eins gibt. Beachte dazu Bemerkung 9.5 im Skript. (Leseaufgabe)
(ii) Sei (U,φ) eine Karte von M. Zeige, dass auf der Mannigfaltigkeit U ein glatter Zusammenhang existiert.
(iii) Zeige, dass auf M ein glatter Zusammenhang existiert.

Aufgabe 13.3. (4 Punkte)
Sei $M = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Sei $p \in M$ und sei $P(p)$ die orthogonale Projektion auf T_pM. Definiere $X(p) := P(p)\langle e_{n+1}\rangle$ und $f(p) := p^1$, d. h. die erste Koordinate von $p \in \mathbb{S}^n$.

Berechne Xf.

Abgabe: Bis Montag, 03.02.2014, 10:00 Uhr, in der Vorlesung.