Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2013/2014

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 14

Aufgabe 14.1. (4 Punkte)
Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f\colon M \to N$ eine Immersion. Sei g eine Riemannsche Metrik auf N. Dann definiert

$$f^*g(X,Y) := g(f_*X, f_*Y)$$

für Vektorfelder X, Y auf M eine Riemannsche Metrik auf M. Zeige dies.

Folgere mit Hilfe von Theorem 5.19, dass es auf jeder kompakten Mannigfaltigkeit eine Riemannsche Metrik gibt.

Aufgabe 14.2. (4 Punkte)
Seien M, N und f wie in der Definition von f^*g. Beschreibe f^*g mit Hilfe von $g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$, f, einer Karte (U,φ) für M und einer Karte (V,ψ) für N in Koordinaten.

Vergleiche das Resultat mit den entsprechenden Definitionen aus dem Kapitel über Hyperflächen im Euklidischen.

Aufgabe 14.3. (4 Punkte)
Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $f\colon M \to N$ sowie $h\colon N \to \mathbb{R}$ glatte Abbildungen. Sei Z ein glattes Vektorfeld auf M. Zeige, dass dann

$$Z(h \circ f) = ((f_*\langle Z\rangle)h) \circ f$$

gilt.

Hinweis: Kettenregel.

Aufgabe 14.4. (4 Punkte)
Seien $(g_{ij})_{i,j}$ die Komponenten einer Riemannschen Metrik und $\left(\Gamma^k_{ij}\right)_{i,j,k}$ die Komponenten der Christoffelsymbole eines Levi-Civita Zusammenhanges bezüglich einer festen Karte einer Mannigfaltigkeit M. Sei $p \in M$.

Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gilt $\frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}(p) = 0$ für alle i,j,k.
(ii) Es gilt $\Gamma^k_{ij}(p) = 0$ für alle i,j,k.

Abgabe: Bis Montag, 10.02.2014, 10:00 Uhr, in der Vorlesung.