Matthias Makowski, Martin Franzen — Universität Konstanz — Sommersemester 2013

Übungen zur Vorlesung Elementare Differentialgeometrie

Blatt 1

Aufgabe 1.1. (4 Punkte)
Zu $x, y \in \mathbb{R}^3$ definieren wir

$$x \times y := \begin{pmatrix} x^2y^3 - x^3y^2 \\ x^3y^1 - x^1y^3 \\ x^1y^2 - x^2y^1 \end{pmatrix}.$$

Seien $x, y, z, w \in \mathbb{R}^3$.

Zeige

(i) $x \times y = -y \times x$
(ii) $\langle x \times y, z\rangle = \det(x, y, z)$
(iii) $(x \times y) \times z = \langle x, z\rangle y - \langle y, z\rangle x$
(iv) $\langle x \times y, z \times w\rangle = \langle x, z\rangle\langle y, w\rangle - \langle x, w\rangle\langle y, z\rangle$
(v) Gelte für diese Teilaufgabe $|x| = |y| = 1$. Dann gilt $|x \times y| = \sin\arccos(\langle x, y\rangle)$.
(vi) $|x \times y|^2 = |x|^2 \cdot \left|y - \langle y, \frac{x}{|x|}\rangle \frac{x}{|x|}\right|^2$
(vii) $\det(y \times z, z \times x, x \times y) = \det(x, y, z)^2$

Aufgabe 1.2. (4 Punkte)
Sei $\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$. Wir definieren den sphärischen Abstand durch

$$d_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}_+, \quad (x, y) \mapsto \arccos(\langle x, y\rangle).$$

Zeige

(i) $(\mathbb{S}^2, d_{\mathbb{S}^2})$ ist ein metrischer Raum.
Hinweis: Verwende die Identitäten aus Aufgabe 1.1 und das folgende Additionstheorem, welches für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b.$$
(ii) Eine Abbildung $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ ist genau dann eine Isometrie von $(\mathbb{S}^2, d_{\mathbb{S}^2})$, wenn ein $A \in O(3)$ mit $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{S}^2$ existiert.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen13.html#ELDG`
Abgabe: Bis Mittwoch, 24.04.2013, 15.15Uhr, in der Vorlesung.