Matthias Makowski, Martin Franzen — Universität Konstanz — Sommersemester 2013

Übungen zur Vorlesung Elementare Differentialgeometrie

Blatt 4

Aufgabe 4.1. (2 Punkte)
Sei $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) \in C^2([0,L], \mathbb{R}^2)$ eine einfache, C^2-geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Sei $\vartheta \in C^1([0,L], \mathbb{R})$ mit $\alpha'(t) = (\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t))$ für alle $t \in [0,L]$. Wir nehmen nun an, dass $\alpha(0) = (0,0)$, $\alpha'(0) = (1,0)$ und $\kappa(t) \geq 0$ gelten. Zeige, dass $\alpha^2 \geq 0$ gilt.

Aufgabe 4.2. (6 Punkte)
Sei $\alpha \in C^2([a,b], \mathbb{R}^2)$ eine C^2-geschlossene, reguläre Kurve. Sei $\varphi \in C^2([0,L],[a,b])$ eine orientierungserhaltende Parametertransformation, so dass $\alpha \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

(i) Zeige, dass $U(\alpha) = 2\pi \int_a^b \kappa(t)|\alpha'(t)|dt$ gilt, wobei κ die Krümmung von α ist.
(ii) Nehme an, dass es eine Funktion $\vartheta \in C^0([a,b], \mathbb{R})$ gibt, so dass $\alpha'(t) = |\alpha'(t)|\, \mu \circ \vartheta(t)$ für alle $t \in [a,b]$ gilt. Zeige, dass $2\pi U(\alpha) = \vartheta(b) - \vartheta(a)$ gilt.
(iii) Sei $H : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ eine C^1-Funktion, so dass $H(t,0) = \alpha(t,0)$, $H(a,\tau) = H(b,\tau)$ für alle $\tau \in [0,1]$ und $\frac{d}{dt}H(t,\tau) \neq 0$ für alle $(t,\tau) \in [a,b] \times [0,1]$ gelten. Sei $\beta(t) := H(t,1)$ für alle $t \in [a,b]$. Zeige, dass $U(\alpha) = U(\beta)$ gilt.
(iv) Berechne die Umlaufzahlen der folgenden beiden Kurven:

$$\alpha : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\sin t, \sin 2t),$$
$$\beta : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (2\cos t, \sin t).$$

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen13.html#ELDG`
Abgabe: Bis Mittwoch, 22.05.2013, 15.15 Uhr, in der Vorlesung.