Matthias Makowski, Martin Franzen Universität Konstanz Sommersemester 2013

Übungen zur Vorlesung Elementare Differentialgeometrie

Blatt 6

Aufgabe 6.1. (8 Punkte)
Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \alpha(x)$ eine glatte, reguläre Kurve. Wir definieren die Bogenlängenableitung $\partial_s := \frac{1}{|\partial_x \alpha|}\partial_x$ (dabei ist $\partial_x\alpha := \frac{d\alpha}{dx}$), die Tangente $\mathcal{T} := \partial_s\alpha$, den Krümmungsvektor $\vec{\varkappa} := \partial_s^2\alpha$, die Krümmung $\kappa := |\vec{\varkappa}|$ und die Normale $\mathcal{N} := \frac{\vec{\varkappa}}{\kappa}$ für $\kappa \neq 0$. Für $n = 3$ definieren wir noch den Binormalenvektor $\mathcal{B} := \mathcal{T} \times \mathcal{N}$ und die Torsion $\tau := \langle \partial_s\mathcal{N}, \mathcal{B}\rangle$. Zeige nun die folgenden Aussagen:

a) Für $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(\vartheta) := \binom{r\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}$ gilt:
$$\partial_\vartheta\alpha = \begin{pmatrix}-r\sin\vartheta\\ r\cos\vartheta\end{pmatrix},\ |\partial_\vartheta\alpha| = r,\ \partial_s = \frac{1}{r}\partial_\vartheta,\ \mathcal{T} = \begin{pmatrix}-\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{pmatrix},\ \vec{\varkappa} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix}-\cos\vartheta\\ -\sin\vartheta\end{pmatrix},\ \kappa = \frac{1}{r},\ \mathcal{N} = \begin{pmatrix}-\cos\vartheta\\ -\sin\vartheta\end{pmatrix}.$$

b) Für $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, $\vartheta \mapsto \alpha(\vartheta)$ gilt:
$$\langle \mathcal{T}, \mathcal{N}\rangle = 0 = \langle \mathcal{T}, \vec{\varkappa}\rangle.$$

c) Für $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, $\vartheta \mapsto \alpha(\vartheta)$ gilt:
$$\kappa = \frac{\left(|\alpha''|^2 - \langle \alpha', \mathcal{T}\rangle^2\right)^{\frac{1}{2}}}{|\alpha'|^2}$$

d) Für $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, $\vartheta \mapsto \alpha(\vartheta)$ gilt:
$$\mathcal{N} = \frac{\alpha'' - \langle \alpha'', \mathcal{T}\rangle\,\mathcal{T}}{\left(|\alpha''|^2 - \langle \alpha'', \mathcal{T}\rangle^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

e) Für $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\vartheta \mapsto \alpha(\vartheta)$ gilt $B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|}$ und
$$\tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2}$$

f) Die obigen Definitionen von Tangente, Normale und Krümmung und für $n = 3$ auch die Definitionen von Binormalenvektor und Torsion stimmen mit den Definitionen der entsprechenden Größen im Skript überein.

g) Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (t, 1, t^3)$. Berechne die Krümmung κ, sowie den Normalenvektor $\mathcal{N}$, sofern letzterer definiert ist. Was passiert mit dem Normalenvektor in $t = 0$?

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen13.html#ELDG`
Abgabe: Bis Mittwoch, 05.06.2013, 15.15 Uhr, in der Vorlesung.