Matthias Makowski, Martin Franzen — Universität Konstanz — Sommersemester 2013

Übungen zur Vorlesung Elementare Differentialgeometrie

Blatt 10

Aufgabe 10.1. (4 Punkte)

(i) Sei $\Omega := (0,\infty) \times (0,2\pi) \times (0,\pi)$. Wir definieren die Abbildung

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^3, \quad (r,\varphi,\vartheta) \mapsto (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta).$$

Zeige, dass die Abbildung X eine injektive Immersion ist.

(ii) Sei $\alpha\colon (a,b) \to \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 = 0 \text{ und } x^1 > 0\right\}$ eine Kurve in der „rechten" Halbebene der x^1-x^3-Ebene. Schreibe

$$\alpha(t) = (r(t), 0, h(t)).$$

Wir nehmen an, dass α eine Einbettung ist. Durch Rotation um die x^3-Achse erhalten wir eine Fläche $X\colon (a,b) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$ mit

$$X(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass X eine Einbettung ist.

Aufgabe 10.2. (4 Punkte)

Berechne die Tangentialräume der folgenden Untermannigfaltigkeiten M_i, $i \in \{1,2,3\}$, in allen Punkten von M_i. Berechne weiterhin die Normalen in allen Punkten der Flächen M_1 und M_2.

(i) Sei $M_1 := \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

(ii) Sei $M_2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \operatorname{dist}(x, \mathbb{S}^1 \times \{0\}) = \frac{1}{4}\}$.

(iii) Sei $M_3 := O(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen13.html#ELDG`

Abgabe: Bis Mittwoch, 03.07.2013, 15.15 Uhr, in der Vorlesung.