Matthias Makowski, Universität Konstanz Sommersemester 2013
Martin Franzen

## Übungen zur Vorlesung Elementare Differentialgeometrie

Blatt 11

**Aufgabe 11.1.** (4 Punkte)
Für festes $\tau \in \mathbb{R}$ sei

$$F_\tau : (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\tau \sin u \sinh v + \sin\tau \cos u \cosh v \\ -\cos\tau \cos u \sinh v + \sin\tau \sin u \cosh v \\ u\cos\tau + v \sin\tau \end{pmatrix}, \quad u \in (-\pi,\pi),\ v \in \mathbb{R}.$$

$(a)$ Skizziere die Fäche $F_0$, genannt Helikoid, und die Fläche $F_{\pi/2}$, genannt Katenoid.

$(b)$ Bestimme die Erste Fundamentalform von $F_\tau$.

$(c)$ Zeige für eine glatte Kurve $\gamma : I \to (-\pi,\pi) \times \mathbb{R}$, dass

$$\frac{d}{d\tau} L\left(F_\tau \circ \gamma\right) = 0,$$

was bedeutet, dass die Transformation $\tau \mapsto F_\tau$ eine längentreue Transformation von Flächen ist.

**Aufgabe 11.2.** (4 Punkte)

(i) Sei $r \in \mathbb{R}_+$ gegeben. Sei $X : (0,2\pi) \times (0,\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$X : (\varphi,\vartheta) \mapsto (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta).$$

Berechne die Erste Fundamentalform dieser Parametrisierung der Sphäre mit Radius $r$ und berechne $A_g((0,2\pi)\times(0,\pi))$.

(ii) Sei $\alpha : (a,b) \to \{x \in \mathbb{R}^3 : x^2 = 0 \text{ und } x^1 > 0\}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve in der ‚rechten Halbebene' der $x^1$-$x^3$-Ebene. Schreibe

$$\alpha(t) = (r(t), 0, h(t)).$$

Sei

$$X : (a,b) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ X(t,\varphi) = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

Berechne die Erste Fundamentalform dieser Parametrisierung und zeige, dass

$$A_g((a,b)\times[0,2\pi)) = 2\pi \int_a^b r(t)dt.$$

**Webseite:** `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen13.html#ELDG`
**Abgabe:** Bis Mittwoch, 10.07.2013, 15.15 Uhr, in der Vorlesung.