ELEMENTARE DIFFERENTIALGEOMETRIE

MATTHIAS MAKOWSKI

Zusammenfassung. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu einer Vorlesung Elementare Differentialgeometrie an der Universität Konstanz im Sommersemester 2013.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Dieses Skript baut im Wesentlichen auf das Vorlesungsskript [3]. Wir verwenden weiterhin [2, 1, 4].

Wir möchten in dieser Vorlesung die Geometrie von Kurven und Flächen vom analytischen Standpunkt her betrachten.

In der Geometrie gibt es verschiedene Auffassungen von geometrischen Objekten. In der Topologie sind zwei verschiedene geometrische Objekte (topologische Räume) als „gleich“ anzusehen, wenn es einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt, d. h. stetige Deformationen des Objektes, welche die Länge oder die Fläche des Objektes verändern, können noch dasselbe geometrische Objekt darstellen.

In der Differentialgeometrie hingegen fordert man von einem geometrischen Objekt, dass es bewegungsunabhängig (d.h. unter Längen- und Winkelerhaltenden Abbildungen invariant) ist. Weiterhin arbeitet man üblicherweise mit Parametrisierungen eines geometrischen Objektes (wie beispielsweise einer parametrisierten Kurve), allerdings soll das Objekt selbst unter Umparametrisierungen invariant bleiben. Diese zwei Bedingungen sollten wir also auch an alle Eigenschaften und Größen, welche wir für diese Objekte definieren, fordern.

Date: 8. Oktober 2013.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 53-01.

Eine zentrale Eigenschaft geometrischer Objekte, welche wir in dieser Vorlesung für Kurven und Flächen definieren möchten, ist die Krümmung.

Die Krümmung sollte hierbei eine Größe sein, welche unser intuitives Verständnis des Begriffs widerspiegelt. Die Krümmung ist dabei eine lokale Eigenschaft, d. h. wir werden von der Krümmung in einem Punkt sprechen.

Wir fordern von dem Krümmungsbegriff (für Kurven), dass er die folgenden Eigenschaften erfüllen soll:

1) Eine Gerade ist nicht gekrümmt, d. h. sie hat in jedem Punkt die Krümmung 0.
2) Da ein Kreis mit Mittelpunkt $0 \in \mathbb{R}^2$ unter Drehungen invariant ist, sollte er in jedem Punkt dieselbe Krümmung haben. Ein Kreis hat also eine konstante Krümmung. Ein Kreis mit größerem Radius ist anschaulich gesehen weniger gekrümmt als ein Kreis mit kleinerem Radius. Wir fordern also von der Definition der Krümmung, dass ein Kreis vom Radius $r \in \mathbb{R}_+$ die Krümmung $\pm\frac{1}{r}$ haben soll, wobei das Vorzeichen von der Orientierung der Kurve abhängt.
3) Für beliebige Kurven möchten wir die Krümmung in einem Punkt dadurch definieren, dass sie der Krümmung desjenigen Kreises entspricht, welcher die Kurve in diesem Punkt am besten approximiert, wobei wir hierfür eine Gerade als einen Kreis mit unendlichem Radius auffassen.

An einem Punkt einer Kurve sollten wir in der Lage sein eine C^2-Approximation der Kurve in dem Punkt zu erhalten, falls sowohl Orts-, Tangential- und Normalenvektor, sowie die Krümmung in diesem Punkt bekannt sind.

Im Fall von Flächen werden wir eine Bilinearform einführen, welche die Krümmung in einem Punkt beschreibt und deren Eigenwerte wir als Hauptkrümmungen bezeichnen. Die Krümmung einer Kurve, welche auf der Fläche verläuft, in einem Punkt lässt sich dann als Linearkombination der Hauptkrümmungen der Fläche in diesem Punkt erhalten.

Obwohl die Krümmung eine lokale Grösse ist, lassen sich aus ihr Informationen über globale Eigenschaften von Kurven und Flächen gewinnen. Dies werden wir an zwei Theoremen verdeutlichen:

In Kapitel 4.1 beweisen wir den Hopfschen Umlaufsatz, mit dessen Hilfe man beispielsweise schließen kann, dass einfach geschlossene, ebene Kurven genau dann ein konvexes Gebiet einschließen, wenn ihre Krümmung (bei geeigneter Orientierung) in jedem Punkt nicht-negativ ist.

In Kapitel 4.3 beweisen wir den Satz von Fenchel, welcher unter anderem eine Bedingung an die Krümmung von Raumkurven angibt, damit diese geschlossen sein können.

2. Isometrien des $\mathbb{R}^n$

Definition 2.1. Eine Abbildung $f\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ zwischen zwei metrischen Räumen (X_i, d_i) heißt *Isometrie*, falls

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$$

für alle $x, y \in X_1$ gilt und f surjektiv ist.

Lemma 2.2. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann bildet die Menge der Isometrien $f\colon (X, d) \to (X, d)$ bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe.*

Beweis. Isometrien sind injektiv, also auch bijektiv und daher invertierbar mit bijektiver Inversen. Seien f, g Isometrien. Dann folgt aus $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ auch $d(x, y) = d(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$. Daher ist f^{-1} ebenfalls eine Isometrie. Es gilt

$$d(f \circ g(x), f \circ g(y)) = d(g(x), g(y)) = d(x, y),$$

jeweils für alle $x, y \in X$. Die Bijektivität von f und g überträgt sich auf die Komposition $f \circ g$. Die Identität $x \mapsto x$ ist das neutrale Element. $\square$

Theorem 2.3. *Die Isometrien $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ des $\mathbb{R}^n$ sind genau die Abbildungen der Form*
$$f(x) = Ax + b$$
mit $A \in O(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Gelte $f(x) = Ax + b$. Dann rechnet man direkt nach, dass es sich um eine Isometrie handelt.

„$\Longleftarrow$“: Sei f eine beliebige Isometrie. Durch Addition eines konstanten Vektors in $\mathbb{R}^n$ dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $f(0) = 0$ gilt. Wir erhalten
$$|f(x)| = d(f(x), 0) = d(f(x), f(0)) = d(x, 0) = |x|$$
für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Da f eine Isometrie ist, gilt $|f(x)-f(y)| = |x-y|$. Aufgrund der Polarisationsformel (oder durch direktes Ausmultiplizieren der quadrierten Normen) erhalten wir
$$\begin{aligned} 2\langle f(x), f(y)\rangle &= |f(x)|^2 + |f(y)|^2 - |f(x) - f(y)|^2 \\ &= |x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2 = 2\langle x, y\rangle. \end{aligned}$$
Somit erhält f auch das Skalarprodukt. Sei $(e_i)_{1\le i\le n}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Wir erhalten $\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Dies besagt, dass auch $(f(e_i))_{1\le i\le n}$ eine Orthonormalbasis ist. Daher gilt für $x \in \mathbb{R}^n$
$$f(x) = \sum_{i=1}^n \langle f(x), f(e_i)\rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^n x^i f(e_i).$$
Somit ist f eine lineare Abbildung. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass eine lineare Abbildung, die eine Orthonormalbasis auf eine andere Orthonormalbasis abbildet, durch eine orthogonale Matrix dargestellt wird. □

Definition 2.4. Die Isometrien $f(x) = Sx + b$, $S \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ heißen *(Euklidische) Bewegungen.*

Die Isometrie $f(x) = Sx + b$ heißt *orientierungserhaltend* oder *eigentliche Bewegung*, falls $\det S = 1$ für die orthogonale Matrix S gilt.

Definition 2.5. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann heißt
$$\sphericalangle(x, y) = \arccos \frac{\langle x, y\rangle}{|x| \cdot |y|} \in [0, \pi]$$
der *Winkel* zwischen x und y.

3. Kurven im $\mathbb{R}^n$

Definition 3.1.
(i) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Abbildung $\alpha \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \equiv \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$, heißt *parametrisierte C^k-Kurve* im $\mathbb{R}^n$.
(ii) Eine C^1-Kurve α heißt *regulär*, falls $\alpha'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, d.h. der *Tangentialvektor* $\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$ ist wohldefiniert.
(iii) Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine C^k-Kurve $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *C^k-geschlossen*, falls
$$\alpha^{(l)}(a) = \alpha^{(l)}(b)$$
für alle $0 \le l \le k$ gilt.
(iv) Eine geschlossene Kurve $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *einfach*, falls $\alpha|_{[a,b)}$ eine injektive Abbildung ist.
(v) Eine Kurve α heißt *stückweise von der Klasse C^k*, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls es ein $N \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \le i \le N$, $a_i < a_{i+1}$, mit $I = [a_0, a_N]$ und $\alpha|_{[a_i, a_{i+1}]} \in C^k$ für alle $0 \le i \le N - 1$ gibt.

Definition 3.2 (Bogenlänge)**.** Sei $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stückweise C^1-Kurve. Dann ist

$$L(\alpha) := \int\limits_a^b |\alpha'(t)|\, dt$$

die *Bogenlänge* der Kurve α, wobei die Integration jeweils einzeln über Intervalle, auf denen α von der Klasse C^1 ist, ausgeführt wird. Die Kurve heißt *nach der Bogenlänge parametrisiert*, falls $|\alpha'(t)| = 1$ für alle $t \in [a,b]$ gilt, in welchen die Kurve differenzierbar ist.

Bemerkung 3.3. Ist $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ nach der Bogenlänge parametrisiert, so folgt $L(\alpha) = b - a$.

Beispiele 3.4.

(i) Die Kurve $\alpha : [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = r\left(\cos\frac{s}{r}, \sin\frac{s}{r}\right)$, $r > 0$, ist ein nach der Bogenlänge parametrisierter Kreis. Es gilt also

$$L(\alpha) = 2\pi r.$$

(ii) Seien $r, h \in \mathbb{R}$ und $L > 0$ noch zu wählen. Eine Schraubenlinie (Helix) mit Ganghöhe $2\pi h$ und Radius r wird durch

$$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3, \alpha(t) = \left(r\cos\frac{t}{L}, r\sin\frac{t}{L}, h\frac{t}{L}\right)$$

parametrisiert. Wegen $|\alpha'(t)| = \sqrt{r^2+h^2}\frac{1}{L}$ ist die Helix genau für $L = \sqrt{r^2+h^2}$ nach der Bogenlänge parametrisiert.

Definition 3.5. Seien $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ zwei abgeschlossene Intervalle.

(i) Sei $k \in \mathbb{N}_+$. Ein C^k-Diffeomorphismus $\varphi \in C^k(I_2, I_1)$, d. h. eine Bijektion mit $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in I_2$, heißt *C^k-Parametertransformation*. Sie heißt *richtungstreu*, falls $\varphi' > 0$ gilt und *richtungsumkehrend*, wenn $\varphi' < 0$ gilt.

(ii) Seien $\alpha_i\colon I_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, parametrisierte Kurven. Dann heißt α_2 *Umparametrisierung* von α_1, falls es eine C^1-Parametertransformation φ gibt, so dass

$$\alpha_2 = \alpha_1 \circ \varphi$$

gilt.

Lemma 3.6. *Auf der Menge aller parametrisierten Kurven in $\mathbb{R}^n$ ist $\sim$ mit $\alpha \sim \beta$, falls β eine Umparametrisierung von α ist, eine Äquivalenzrelation.*

Beweisidee. Beachte dazu insbesondere, dass die Inverse einer Parametertranformation wieder eine Parametertransformation ist und dass die Verknüpfung von zwei Parametertransformationen (bei geeigneten Definitionsbereichen) ebenfalls eine Parametertransformation ist. □

Lemma 3.7. *Seien α_1, α_2 stückweise C^1-Kurven, so dass α_2 eine Umparametrisierung von α_1 ist, $\alpha_2 = \alpha_1 \circ \varphi$.*

(i) Dann gilt $L(\alpha_1) = L(\alpha_2)$.

(ii) Der normierte Tangentialvektor $\frac{\alpha_i'}{|\alpha_i'|}$ ist bei einer orientierungserhaltenden Parametertransformation invariant, d. h. es gilt

$$\frac{\alpha_2'}{|\alpha_2'|} = \frac{\alpha_1'}{|\alpha_1'|} \circ \varphi.$$

(iii) Ist α_1 regulär, so auch α_2.

Beweis.

(i) Sei α_i auf $I_i = [a_i, b_i]$ definiert. Dann erhalten wir mit Hilfe der Transformationsformel für Integrale

$$L(\alpha_2) = \int_{a_2}^{b_2} |\alpha_2'(t)|\, dt = \int_{a_2}^{b_2} |\alpha_1'(\varphi(t))| \cdot |\varphi'(t)|\, dt = \int_{a_1}^{b_1} |\alpha_1'(\tau)|\, d\tau = L(\alpha_1).$$

Ist $\varphi' < 0$, so wird der Faktor $\frac{|\varphi'|}{\varphi'} = -1$ aufgrund der Integraltransformation durch Vertauschen der Integrationsgrenzen wieder kompensiert.

(ii) Es gilt

$$\frac{\alpha_2'(t)}{|\alpha_2'(t)|} = \frac{\frac{d}{dt}\alpha_1(\varphi(t))}{\left|\frac{d}{dt}\alpha_1(\varphi(t))\right|} = \frac{\alpha_1'(\varphi(t))}{|\alpha_1'(\varphi(t))} \cdot \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}.$$

(iii) Dies folgt ebenfalls aus der Kettenregel $\alpha_2'(\varphi(t)) = \alpha_1'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$. □

Theorem 3.8. *Sei $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre C^k-Kurve, $k \geq 1$. Dann gibt es eine (orientierungserhaltende) Parametertransformation $\varphi \in C^k(J, I)$, so dass $\alpha \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.*

Beweis. Definiere die Bogenlängenfunktion $\sigma\colon I \to \mathbb{R}$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ durch

$$\sigma(t) := \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)|\, d\tau$$

und setze $J := \sigma(I)$. Wegen $\sigma'(t) = |\alpha'(t)| > 0$ ist $\sigma \in C^k(I, J)$ invertierbar. Setze $\varphi(s) := \sigma^{-1}(s)$. Wir erhalten aus $\varphi(\sigma(\tau)) = \tau$ zunächst $\varphi'(\sigma(\tau))\sigma'(\tau) = 1$ und $\varphi'(s) = \frac{1}{\sigma'(\varphi(s))}$. Somit gilt

$$\left|\frac{d}{ds}\alpha(\varphi(s))\right| = |\alpha'(\varphi(s))| \cdot \frac{1}{\sigma'(\varphi(s))} = 1$$

und wir erhalten die Behauptung.

Es ist üblich, s als Parameter für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve zu verwenden. □

Bemerkung 3.9. Sind α_i, $i = 1, 2$, beide nach der Bogenlänge parametrisiert und gelte $\alpha_2(s) = \alpha_1(\varphi(s))$, dann folgt

$$1 = |\alpha_2'(s)| = |\alpha_1'(\varphi(s))| \cdot |\varphi'(s)| = |\varphi'(s)|$$

und daher ist $\varphi(s) = s_0 \pm s$. Die Parametrisierung nach der Bogenlänge ist also bis auf eine Isometrie von $\mathbb{R}$ eindeutig bestimmt.

4. Krümmung von Kurven

4.1. **Kurven in der Ebene.** Wir möchten in diesem Abschnitt die Krümmung von Kurven in der Ebene definieren. Hierbei fordern wir von dem Krümmungsbegriff, dass er die Eigenschaften 1), 2) und 3)aus der Einleitung erfüllt.

Definition 4.1. Sei $\alpha \in C^k\left(I, \mathbb{R}^2\right)$, $k \geq 1$, regulär.

(i) Eine gegen den Uhrzeigersinn orientierte *90-Grad-Drehung* ist durch die folgende Matrix gegeben: $J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es gilt $J^2 = -\mathbb{1}$ und $\langle Jv, w\rangle = \det(v, w)$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$. Identifizieren wir einen Vektor $z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit $z := a + ib \subset \mathbb{C}$, so ist bezüglich dieser Identifizierung $Jz = iz$.

(ii) Wir bezeichnen den *Tangentialvektor* von α mit $\tau(t) := \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$.

(iii) ν in $C^{k-1}\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ mit $\nu(t) := J\tau(t)$ heißt *Normale* (Einheitsnormale) an α. Sie ist also eindeutig dadurch bestimmt, dass $\tau(t), \nu(t)$ ein positiv orientiertes (normiertes) 2-Bein längs α ist, d. h. $\tau(t)$ ist ein positives Vielfaches von $\alpha'(t)$, $|\tau(t)| = 1$, $|\nu(t)| = 1$ und $\det(\tau(t), \nu(t)) = 1$.

(iv) Sei nun $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann definieren wir die *(orientierte) Krümmung* $\kappa \in C^0(I, \mathbb{R})$ von α durch
$$\kappa(s) := \langle \alpha''(s), \nu(s)\rangle.$$
Ist α nicht nach der Bogenlänge parametrisiert, so definieren wir die Krümmung von α durch
$$\kappa_\alpha := \kappa_{\alpha\circ\varphi} \circ \varphi^{-1},$$
wobei φ eine orientierungserhaltende C^2-Parametertransformation ist, so dass $\alpha \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Den Beweis, dass die Krümmung einer nicht nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve wohldefiniert ist, lassen wir als Übungsaufgabe.

Lemma 4.2. *Sei $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^2-Kurve. Dann gilt*
$$\kappa(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{|\alpha'(t)|^3}.$$
Ist α ein Graph, also von der Form $\alpha(x) = (x, u(x))$ mit $u \in C^2(I, \mathbb{R})$, so gelten
$$\tau(x) = \frac{1}{\sqrt{1+u'(x)^2}}(1, u'(x)), \quad \kappa(x) = \frac{u''(x)}{\left(1+(u'(x))^2\right)^{3/2}}.$$

Beweis. Sei $\tilde\alpha := \alpha \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert und gelte $\varphi' > 0$. Die Behauptung folgt nun aus den folgenden Rechnungen:
$$\begin{aligned} 1 = |\tilde\alpha'(s)| &= |(\alpha\circ\varphi)'(s)| = |\alpha'(\varphi(s))| \cdot \varphi'(s),\\ \varphi'(s) &= \frac{1}{|\alpha'(\varphi(s))|},\\ \tilde\alpha''(s) &= (\alpha''\circ\varphi)\varphi'^2 + (\alpha'\circ\varphi)\varphi''.\\ \kappa_\alpha \circ \varphi(s) &\underset{Def}{=} \kappa_{\tilde\alpha}(s) = \langle \tilde\alpha''(s), J\tilde\alpha'(s)\rangle = \langle \alpha''\circ\varphi, J\alpha'\circ\varphi\rangle \varphi'^3. \end{aligned}$$
Aus der zweiten und der letzten Gleichung folgt
$$\kappa_\alpha(s) = \frac{\langle \alpha''(s), J\alpha'(s)\rangle}{|\alpha'(s)|^3} = \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s))}{|\alpha'(s)|^3}.$$
Im graphischen Fall erhalten wir aus $\alpha(x) = (x, u(x))$ für die Ableitungen $\alpha'(x) = (1, u'(x))$ und $\alpha''(x) = (0, u''(x))$. Mit $|\alpha'(x)| = \sqrt{1+(u'(x))^2}$ folgt die Behauptung. □

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen könnten wir mittels des folgenden Lemmas die Eindeutigkeit (bis auf euklidische Bewegungen) von Kurven mit vorgeschriebener Krümmungsfunktion κ folgern:

Lemma 4.3. *Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann gelten für $\tau = \alpha'$ und $\nu = J\tau$ die Gleichungen*
$$\begin{aligned} \tau' &= \kappa\nu,\\ \nu' &= -\kappa\tau \end{aligned}$$
oder
$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\tau\\ \nu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa\\ -\kappa & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau\\ \nu\end{pmatrix}.$$

Beweis. Aus $\langle \tau(s), \tau(s)\rangle = 1$ folgt durch Differenzieren $0 = 2\langle \tau(s), \tau'(s)\rangle$. Damit folgt die erste Gleichheit. Differenzieren von $0 = \langle \tau, \nu\rangle$ liefert $\kappa = \langle \tau', \nu\rangle = -\langle \tau, \nu'\rangle$. Aus $|\nu| = 1$ folgt wie oben, dass $\langle \nu', \nu\rangle = 0$ gilt. Die Behauptung folgt. $\square$

Lemma 4.4. *Sei $F(x) = Sx + a$ mit $S \in O(2)$ und $a \in \mathbb{R}^2$ eine starre Bewegung. Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Setze $\tilde{\alpha} := F \circ \alpha$. Dann gelten*

$$\tilde{\tau} = S\tau, \quad \tilde{\nu} = \det S \cdot S\nu, \quad \textit{und} \quad \tilde{\kappa} = \det S \cdot \kappa.$$

Beweis. Wegen $|\tilde{\alpha}'| = |S\alpha'| = |\alpha'| = 1$ ist $\tilde{\alpha}$ ebenfalls nach der Bogenlänge parametrisiert. Es gilt $\tilde{\tau} = \frac{S\alpha'}{|\tilde{\alpha}'|} = S\alpha' = S\tau$. Weiterhin gilt $\langle \tilde{\alpha}', S\nu\rangle = \langle S\alpha', S\nu\rangle = \langle \alpha', \nu\rangle = 0$, $|S\nu| = |\nu| = 1$ sowie $\det(\tilde{\alpha}', S\nu) = \det(S\alpha', S\nu) = \det S \cdot \det(\alpha', \nu) = \det S$. Somit ist $\tilde{\nu} = \det S \cdot S\nu$ die gesuchte Normale längs $F \circ \alpha$. Schließlich gilt

$$\tilde{\kappa} = \langle \tilde{\alpha}'', \tilde{\nu}\rangle = \det S \cdot \langle S\alpha'', S\nu\rangle = \det S \cdot \kappa. \qquad \square$$

Nun möchten wir überprüfen, ob die hier gegebene Definition der Krümmung auch den dritten Punkt erfüllt, den wir in der Einleitung gefordert haben. Hierzu möchten wir zunächst eine vorteilhafte Darstellung der Kurve lokal um einen Punkt erhalten, die *lokale Normalform.*

Theorem 4.5 (Lokale Normalform)**.** *Sei $\alpha \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ regulär mit $s_0 \in I$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine orientierungserhaltende Parametertransformation*

$$\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to I \quad \textit{mit } \varphi(0) = s_0, \quad \varphi' > 0,$$

so dass $\tilde{\alpha} := \alpha \circ \varphi$ in lokaler Normalform vorliegt, d. h. für $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s_0) + s\tau(s_0) + \frac{1}{2}s^2\kappa(s_0)\nu(s_0) + o(s^2)\nu(s_0). \tag{4.1}$$

Beweis. Wir können zunächst oBdA annehmen, dass α nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Sei $h(s) := \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), \tau(s_0)\rangle$. Dann gilt in s_0

$$h'(s_0) = \langle \alpha'(s_0), \tau(s_0)\rangle = |\alpha'(s_0)| = 1.$$

Sei also $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to I$, $\varphi(0) = s_0$, eine lokale Umkehrfunktion zu h mit $\varphi' > 0$, dann gilt $h \circ \varphi(s) = s$ für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Somit folgt für $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \varphi$ die Darstellung

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s_0) + s\tau(s_0) + f(s)\nu(s_0),$$

wobei $f(s) := \langle \tilde{\alpha}(s) - \alpha(s_0), \nu(s_0)\rangle$ ist. Es gelten $f(0) = 0$ und

$$f'(0) = \langle \alpha'(\varphi(0))\varphi'(0), \nu(s_0)\rangle = \varphi'(0)\langle \alpha'(s_0), \nu(s_0)\rangle = 0.$$

Wegen

$$f''(0) = \langle \tilde{\alpha}''(0), \nu(s_0)\rangle = \varphi''(0)\langle \alpha'(s_0), \nu(s_0)\rangle + (\varphi'(0))^2\langle \alpha''(s_0), \nu(s_0)\rangle = \kappa(s_0)$$

erhalten wir die gewünschte Darstellung in (4.1) aus der Taylorentwicklung von f. $\square$

Bemerkung 4.6. Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Sei $s_0 \in \overset{\circ}{I} = \operatorname{int} I$. Definiere die Halbebenen und den Tangentialraum von α in $\alpha(s_0)$ durch

$$E^{\pm} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \pm \langle x - \alpha(s_0), \nu(s_0)\rangle > 0\right\}$$

und

$$T_{\alpha(s_0)} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \langle x - \alpha(s_0), \nu(s_0)\rangle = 0\right\}.$$

Setze $h(s) := \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), \nu(s_0)\rangle$. Dann sind $\pm h(s) > 0$ und $\alpha(s) \in E^{\pm}$ äquivalent. Somit erhalten wir aus der lokalen Normalform im Falle $\kappa(s_0) > 0$, dass $\alpha(s) \in E^+$

für $s \neq s_0$ nahe bei s_0 gilt (Linkskurve). Eine entsprechende Aussage gilt für $\kappa(s_0) < 0$ und $\alpha(s) \in E^-$.

Theorem 4.7. *Sei $\alpha \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ regulär. Sei $s_0 \in I$. Dann gilt:*

(i) Ist $\kappa(s_0) = 0$, so ist α bis zu zweiter Ordnung asymptotisch zu einer Geraden, d. h. es gibt eine Parametrisierung β einer Geraden mit $|\alpha(s) - \beta(s)| = o(|s - s_0|^2)$.

(ii) Ist $\kappa(s_0) \neq 0$, so ist α bis zu zweiter Ordnung asymptotisch zu einem Kreis mit Radius $\frac{1}{\kappa(s_0)}$, d. h. es gibt eine Parametrisierung β eines Kreises mit Krümmung $\kappa(s_0)$, welche $|\alpha(s) - \beta(s)| = o(|s - s_0|^2)$ erfüllt.

Beweis. Mittels der lokalen Normalform und Lemma 4.4 schließen wir, dass es eine orientierungserhaltende Parametertransformation $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to I$ mit $\varphi(0) = s_0$ und eine starre Bewegung F gibt, so dass $\tilde{\alpha} := F \circ \alpha \circ \varphi$ die Darstellung $\tilde{\alpha}(z) = (z, u(z))$ mit $u \in C^2((-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{R})$ erfüllt, wobei $u(z) = \frac{1}{2}\kappa(0)z^2 + o(z^2)$ gilt.

Die Aussagen $(i), (ii)$ sind für $\tilde{\alpha}$ leicht nachzuprüfen: Falls $\kappa(0) = 0$ ist, so sei $\tilde{\beta}(s) := (s, 0)$ und falls $\kappa(0) \neq 0$ gilt, so sei

$$\tilde{\beta}(s) := \left(s, \frac{\kappa(0)}{|\kappa(0)|} \left(\frac{1}{|\kappa(0)|} - \sqrt{\frac{1}{|\kappa(0)|^2} - |s|^2} \right) \right)$$

für $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Es gilt also $|(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})(z)| = o(|z|^2)$.

Sei $\beta := F^{-1} \circ \tilde{\beta} \circ \varphi^{-1}$. Da φ ein Diffeomorphismus ist, gibt es $c_0 > 0$, so dass $|\varphi^{-1}(s) - \varphi^{-1}(s_0)| \leq c_0 |s - s_0|$ für alle $s \in \varphi\left(\left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$ gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{|\alpha(s) - \beta(s)|}{|s - s_0|^2} &\leq c_0^2 \frac{|F^{-1} \circ \left(\tilde{\alpha} \circ \varphi^{-1} - \tilde{\beta} \circ \varphi^{-1} \right)(s)|}{|\varphi^{-1}(s)|^2} \\ &= c_0^2 \frac{|(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})(\varphi^{-1}(s))|}{|\varphi^{-1}(s)|^2}. \end{aligned}$$

Für $s \to s_0$ konvergiert dieser Ausdruck wegen $|(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})(z)| = o(|z|^2)$ gegen Null, woraus die Aussage folgt. □

Nun wollen wir noch ein globales Resultat für ebene Kurven beweisen, den Hopfschen Umlaufsatz. Um die Umlaufzahl einer Kurve zu definieren, benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 4.8. *(Liftung). Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sternförmig. Sei $\gamma : A \to S^1$ stetig. Sei $\mu : \mathbb{R} \to S^1$ durch*

$$\mu(\vartheta) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)$$

definiert. Dann gibt es eine stetige Funktion $\vartheta : A \to \mathbb{R}$ mit

$$\gamma(p) = \mu \circ \vartheta(p). \tag{4.2}$$

Ist $\tilde{\vartheta}$ eine weitere Funktion mit dieser Eigenschaft, so gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\vartheta - \tilde{\vartheta} = 2\pi k$.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $A = [a, b]$ ist und zeigen zuerst die Eindeutigkeit modulo 2π. Seien also $\vartheta, \tilde{\vartheta}$ zwei Funktionen, welche (4.2) erfüllen. Es genügt zu zeigen, dass aus $\vartheta(a) = \tilde{\vartheta}(a)$ bereits $\vartheta = \tilde{\vartheta}$ folgt. Sei nun

$$M := \{t \in [a, b] : \vartheta(t) = \tilde{\vartheta}(t)\}.$$

Nach Annahme ist M nicht leer und aus der Stetigkeit von ϑ und $\tilde{\vartheta}$ folgt die Abgeschlossenheit von M. Wir zeigen noch, dass M offen ist.

Sei $t \in [a,b]$ beliebig. Dann gibt es eine offene, zusammenhängende Menge $I_t \subset [a,b]$, mit $t \in I_t$ und $\gamma(I_t) \subsetneq \mathbb{S}^1$. Dann gibt es ein offenes Intervall $J \subset \mathbb{R}$ mit $|J| \leq 2\pi$, so dass

$$\mu^{-1}(\gamma(I_t)) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (J + k2\pi)$$

gilt und $\mu|_{J+k2\pi}$ ein Homöomorphismus für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist. Sei nun $\xi \in \mu^{-1}(\gamma(t))$, dann gibt es genau ein $\vartheta \in C^0(I_t, \mathbb{R})$ mit $\vartheta(t) = \xi$ und $\gamma|_{I_t} = \mu \circ \vartheta$.

Ist also $t \in M$, so muss aufgrund der Eindeutigkeit von ϑ auf I_t auch $I_t \subset M$ sein, woraus die Offenheit von M folgt. Wir erhalten also $M = [a,b]$, was die Eindeutigkeit beweist.

Wir zeigen nun die Existenz von ϑ. Sei hierzu

$$K = \{t \in [a,b] : \vartheta \text{ kann stetig auf } [a,t] \text{ definiert werden}\}.$$

Sei $t := \sup K$. Dann ist $t \in K$ und es gibt eine in $[a,b]$ offene Menge K_t mit $K_t \subset K$, denn: Sei $t_0 \in K \cap I_t$ und definiere $\tilde{\vartheta}$ auf I_t wie im obigen Verfahren. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\vartheta(t_0) - \tilde{\vartheta}(t_0) = 2\pi k$, woraus aufgrund der Eindeutigkeit $\vartheta|_{[t_0,t]} = 2\pi k + \tilde{\vartheta}$ folgt. Wir können also ϑ auf I_t durch $2\pi k + \tilde{\vartheta}$ definieren und erhalten $I_t \subset K$. Es folgt $t = b$ und somit die Existenz von ϑ.

Sei nun $A \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig. Wir können oBdA annehmen, dass A sternförmig bezüglich 0 ist. Sei $\xi \in \mu^{-1} \circ \gamma(0)$ beliebig und setze $\vartheta(0) = \xi$. Wir definieren nun ϑ auf ganz A, indem wir ϑ auf jedem Strahl durch 0 als eine stetige Funktion definieren, welche (4.2) erfüllt. Dass dies möglich ist, haben wir oben gezeigt.

Wir zeigen noch, dass ϑ stetig ist. Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von γ auf A folgt die Existenz von $\delta > 0$, so dass für alle $p \in A$

$$\gamma(B_\delta(p)) \subset \text{Halbkreis}(\gamma(p)) := \{q \in \mathbb{S}^1 : \langle q, \gamma(p)\rangle > 0\} \tag{4.3}$$

gilt.

Seien nun $p \in A$ und $q \in B_\delta(p)$. Sei $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $h(s) := \vartheta(sp) - \vartheta(sq)$ definiert. Dann ist $h([0,1]) \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, denn nehme an, dass es ein s mit $|h(s)| \geq \frac{\pi}{2}$ gibt. Dann gibt es wegen $h(0) = 0$ aufgrund des Zwischenwertsatzes ein $s_0 \in [0,1]$ mit $|h(s_0)| = \frac{\pi}{2}$. Aus $|s_0p - s_0q| < \delta$ und $\langle\gamma(s_0p), \gamma(s_0q)\rangle = 0$ folgt ein Widerspruch zu (4.3). Auf Halbkreis$(\gamma(p))$ ist μ invertierbar, somit folgt aus (4.2) die Stetigkeit von ϑ auf $B_\delta(p)$. □

Wir können nun die Umlaufzahl einer Kurve definieren:

Definition 4.9. (Umlaufzahl). Sei $\alpha \in C^1([0,L], \mathbb{R}^2)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte, C^1-geschlossene Kurve. Nach Lemma 4.8 existiert eine Winkelfunktion $\vartheta \in C^0([0,L], \mathbb{R})$ mit $\alpha'(t) = \mu \circ \vartheta(t)$. Wir definieren die *Umlaufzahl* von α durch

$$U(\alpha) := \frac{1}{2\pi}(\vartheta(L) - \vartheta(0)).$$

Die Umlaufzahl ist unabhängig von der Winkelfunktion und es gilt $U(\alpha) \in \mathbb{Z}$. Ist $\alpha \in C^1([a,b], \mathbb{R}^2)$ eine reguläre, C^1-geschlossene Kurve und φ eine orientierungserhaltende Parametertransformation, so dass $\alpha\circ\varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist, so definieren wir die Umlaufzahl von α durch die Umlaufzahl von $\alpha \circ \varphi$.

Beispiele 4.10. (i) Sei $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. dann hat $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) := e^{ikt}$, die Umlaufzahl k.

(ii) Die *Lemniskate* (eine umgedrehte Acht) $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) := (\sin t, \sin 2t)$ hat die Umlaufzahl 0.

Definition 4.11. (Totalkrümmung) Sei $\alpha \in C^2([0,L],\mathbb{R}^2)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann definieren wir die *Totalkrümmung* von α durch

$$T(\alpha) := \int_0^L \kappa(t)dt.$$

Bemerkung 4.12. Sei $\alpha \in C^2([0,L],\mathbb{R}^2)$ nach der Bogenlänge parametrisiert und C^1-geschlossen. Sei $\vartheta \in C^1([0,L],\mathbb{R})$ eine Winkelfunktion, so dass $\alpha'(t) = \mu \circ \vartheta(t)$ gilt. Dann gilt $\kappa(t) = \vartheta'(t)$ für alle $t \in [0,L]$. Hieraus folgt $T(\alpha) = 2\pi U(\alpha)$.

Beweis. Durch Differenzieren erhalten wir $\alpha''(t) = \vartheta'(t)J\alpha'(t) = \vartheta'(t)\nu(t)$. Hieraus folgt $\kappa(t) = \vartheta'(t)$. Dies zeigt die erste Aussage. Die Folgerung erhalten wir aus

$$U(\alpha) = \frac{1}{2\pi}(\vartheta(L) - \vartheta(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^L \vartheta'(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(t)dt = \frac{1}{2\pi}T(\alpha).$$

□

Wir können nun den Hopfschen Umlaufsatz beweisen:

Theorem 4.13. *(Hopfscher Umlaufsatz) Für eine einfache C^1-geschlossene, reguläre Kurve $\alpha \in C^1([0,L],\mathbb{R}^2)$ gilt $U(\alpha) \in \{1,-1\}$.*

Beweis. Wir nehmen oBdA an, dass α nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Sei $t_0 \in [0,L]$ der Punkt, an dem die Funtion $t \mapsto |\alpha(t)|$ maximal wird. Dann gilt $T_{\alpha(t_0)} \cap \alpha([0,L]) = \{\alpha(t_0)\}$. Wir können oBdA annehmen, dass $t_0 = 0$ ist. Nach einer euklidischen Bewegung, welche die Umlaufzahl invariant lässt, können wir weiterhin annehmen, dass $\alpha(0) = 0$ und $\alpha'(0) = (1,0)$ gelten.

Wir unterscheiden nun zwischen zwei Fällen: Entweder ist $\alpha^2(t) > 0$ für $t \neq 0$ oder $\alpha^2(t) < 0$ für $t \neq 0$. Im zweiten Fall können wir jedoch an der x-Achse spiegeln und die Aussage für den ersten Fall anwenden (die Spiegelung führt zu einer Orientierungsänderung und somit einem Vorzeichenwechsel bei der Umlaufzahl). Gelte also $\alpha^2(t) > 0$ für $t \neq 0$.

Sei $A := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le s \le t \le L\}$. Wir definieren $\gamma : A \to \mathbb{S}^1$ durch die folgende Vorschrift:

$$\gamma(s,t) := \begin{cases} \frac{\alpha(t)-\alpha(s)}{|\alpha(t)-\alpha(s)|} & \text{für } s < t \text{ und } (s,t) \neq (0,L), \\ \alpha'(t) & \text{für } s = t, \\ -\alpha'(0) & \text{für } s = 0, t = L. \end{cases}$$

γ ist stetig, wie man leicht nachprüft. Lemma 4.8 liefert uns eine Funktion $\vartheta \in C^0(A,\mathbb{S}^1)$ mit $\gamma = \mu \circ \vartheta$ und oBdA $\vartheta(0,0) = 0$. Wegen $\alpha'(t) = \gamma(t,t)$ für alle $t \in [0,L]$ erhalten wir $U(\alpha) = \frac{1}{2\pi}(\vartheta(L,L) - \vartheta(0,0))$.

Es gilt also $2\pi U(\alpha) = \vartheta(L,L) - \vartheta(0,L) + \vartheta(0,L) - \vartheta(0,0)$. Wir betrachten also die Kurven $\beta_1, \beta_2 : [0,L] \to \mathbb{R}$ mit $\beta_1(t) := \vartheta(0,t)$ und $\beta_2(t) := \vartheta(t,L)$.

Wegen $\gamma(0,0) = \alpha'(0) = (1,0)$ entspricht $\beta_1(t)$ dem Winkel zwischen $\alpha(t)$ und der positiven x-Achse für alle $t \in (0,L)$. Da $\alpha^2(t) > 0$ für alle $t \neq 0, L$ gilt, folgt $\beta_1(t) \in (0,2\pi)$ für alle $t \in (0,L)$. Also folgt $\beta_1(L) = \pi$.

Für $t \in (0,L)$ entspricht $\beta_2(t)$ dem Winkel zwischen $-\alpha(t)$ und der positiven x-Achse. Mit der selben Argumentation wie oben erhalten wir $\beta_2(t) \in (\pi,3\pi)$ für $t \in (0,L)$ und somit $\beta_2(L) = 2\pi$.

Es folgt $U(\alpha) = \frac{1}{2\pi}(2\pi - \pi + \pi - 0) = 1$. □

4.2. **Krümmung von Raumkurven.**

Definition 4.14. Sei $\alpha \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann definieren wir die *Krümmung* $\kappa(s) \in [0, \infty)$ von α im Punkt s durch

$$\kappa(s) := |\alpha''(s)|.$$

Beispiele 4.15.

(i) Die Kurve $\alpha(s) = r\left(\cos\frac{s}{r}, \sin\frac{s}{r}\right)$, $r > 0$, ist ein nach der Bogenlänge parametrisierter Kreis. Es gilt
$$\kappa(s) = \frac{1}{r}$$
für alle s.

(ii) Eine Gerade $\alpha(s) = x_0 + s \cdot e$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ hat überall die Krümmung Null.

(iii) Seien $r, a \in \mathbb{R}$ und $L > 0$ noch zu wählen. Dann ist die Schraubenlinie
$$\alpha(t) = \left(r\cos\frac{t}{L}, r\sin\frac{t}{L}, a\frac{t}{L}\right)$$
wegen $|\alpha'(t)| = \sqrt{r^2 + a^2}\frac{1}{L}$ genau für $L = \sqrt{r^2 + a^2}$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Somit ist
$$\kappa(t) = \frac{r}{r^2 + a^2}$$
für alle t.

Definition 4.16. Sei $\alpha \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ regulär. Eine Familie $(v_i)_{1 \le i \le n}$ von Funktionen $v_i \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ heißt ein *längs α begleitendes n-Bein*, falls

$$v_1(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \quad \text{und} \quad \langle v_i(t), v_j(t)\rangle = \delta_{ij}$$

für alle $1 \le i, j \le n$ und alle $t \in I$ gelten.

Man vergleiche das folgende Resultat mit dem Satz der Linearen Algebra, dass jede differenzierbare Familie $A(t)$ orthogonaler Matrizen mit $A(0) = \mathbb{1}$ eine schiefsymmetrische Ableitung $\dot{A}(0)$ besitzt.

Lemma 4.17. *Seien $v_i \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, $1 \le i \le n$, und $t_0 \in I$ beliebig. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.*

(i) $\langle v_i(t), v_j(t)\rangle = \delta_{ij}$ für alle $t \in I$ und alle $1 \le i, j \le n$.

(ii) Es gibt eine t-abhängige Matrix $A = (a_{ij}) \in C^0(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ mit $A = -A^T$, also $a_{ij}(t) = -a_{ji}(t)$ für alle $1 \le i, j \le n$,
$$v_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \quad \textit{für} \quad 1 \le i \le n \quad \textit{und} \quad \langle v_i(t_0), v_j(t_0)\rangle = \delta_{ij}.$$

Beweis.
„(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: Da die Vektoren v_i eine Orthonormalbasis bilden, lässt sich jeder Vektor (und damit insbesondere auch v_i') hiermit darstellen. Es gilt $v_i' = \sum\limits_{j=1}^n a_{ij} v_j$ mit $a_{ij} = \langle v_i', v_j\rangle$. Wir erhalten

$$a_{ji} = \langle v_j', v_i\rangle = \underbrace{\langle v_j, v_i\rangle'}_{=0} - \langle v_j, v_i'\rangle = -a_{ij}.$$

„(ii) $\Longrightarrow$ (i)“: Definiere $g_{ij} := \langle v_i, v_j\rangle$. Dann gelten $g_{ij}(t_0) = \delta_{ij}$ und

$$\begin{aligned} g'_{ij} &= \langle v'_i, v_j\rangle + \langle v_i, v'_j\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n a_{ik}v_k, v_j\right\rangle + \left\langle v_i, \sum_{k=1}^n a_{jk}v_k\right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik}g_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{jk}g_{ik}. \end{aligned}$$

Damit lösen die Funktionen $(g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ ein lineares System von n^2 gewöhnlichen Differentialgleichungen. Da a_{ij} schiefsymmetrisch ist, löst δ_{ij} dieses System ebenfalls,

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}\delta_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{jk}\delta_{ik} = a_{ij} + a_{ji} = 0 = \delta'_{ij}.$$

Der Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen liefert nun $g_{ij}(t) = \delta_{ij}$. $\square$

Definition 4.18. Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\kappa(s) \neq 0$ für alle $s \in I$. Dann heißt α *Frenetkurve.* T, N, B mit $T, N, B\colon I \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ heißt *Frenet-Dreibein* zu α und ist durch

$$\begin{aligned} T &:= \alpha' \quad \text{(Tangentenvektor)}, \\ N &:= \frac{\alpha''}{|\alpha''|} \quad \text{(Hauptnormalenvektor)} \end{aligned}$$

und

$$B := T \times N \equiv \begin{pmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} N^1 \\ N^2 \\ N^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^2N^3 - T^3N^2 \\ T^3N^1 - T^1N^3 \\ T^1N^2 - T^2N^1 \end{pmatrix} \quad \text{(Binormalenvektor)}$$

definiert. Dabei heißt „$\times$“: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit der angegebenen Definition *Kreuzprodukt.* Wir definieren die *Torsion* von $\alpha \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$, $\tau\colon I \to \mathbb{R}$, durch

$$\tau(s) := \langle N'(s), B(s)\rangle.$$

Sind ebene Kurven bereits durch ihre Krümmung bestimmt, so werden wir gleich sehen, dass Raumkurven durch ihre Krümmungsfunktion und ihre Torsion eindeutig bis auf euklidische Bewegungen bestimmt sind. Wir leiten hierfür zunächst die *Frenetgleichungen* her:

Lemma 4.19 (Frenetgleichungen)**.** *Sei $\alpha \in C^3\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Frenetkurve mit Frenet-Dreibein T, N, B. Dann gilt*

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ N' &= -\kappa T + \tau B, \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

oder

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

Beweis. Nach Lemma 4.17 wissen wir, dass die Matrix schiefsymmetrisch sein muss. Nun gilt $T = \alpha'$ und $T' = \alpha'' = \kappa N$ nach Definition von κ und N. Weiterhin nach Definition gilt $\tau = \langle N', B\rangle$. Somit ist die Matrix eindeutig bestimmt. $\square$

Theorem 4.20. *Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ nach der Bogenlänge parametrisiert.*

(i) Ist $\kappa \equiv 0$, so ist $\alpha(I)$ Teilmenge einer Geraden.

(ii) Ist $\alpha \in C^3$ und eine Frenetkurve mit $\tau \equiv 0$, so liegt $\alpha(I)$ in einer Ebene.

Beweis.
(i) Aus $\kappa \equiv 0$ erhalten wir $\alpha'' \equiv 0$. Integrieren liefert $\alpha(s) = p + sv$ für $p, v \in \mathbb{R}^3$.
(ii) Nach Annahme und den Frenetgleichungen erhalten wir $B' \equiv 0$. Also gilt $B(s) \equiv b$ für ein $b \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Mit $\alpha' = T \perp B$ erhalten wir $\langle \alpha(s), b\rangle' = \langle \alpha'(s), b\rangle \equiv 0$. Somit ist $\langle \alpha(s), b\rangle$ konstant und wir schließen $\alpha(I) \subset \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \langle x, b\rangle = a\}$ für ein $a \in \mathbb{R}$. □

Theorem 4.21. *Seien $k \in C^1(I)$ mit $k > 0$ und $\omega \in C^0(I)$ gegeben. Dann gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\alpha \in C^3\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ mit Krümmung $\kappa = k$ und Torsion $\tau = \omega$. Bis auf eine orientierungserhaltende Euklidische Bewegung ist α eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei T, N, B eine C^1-Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

mit gegebenen Anfangswerten $T(s_0) = e_1$, $N(s_0) = e_2$ und $B(s_0) = e_3$. Diese existiert nach Picard-Lindelöf. Nach Lemma 4.17 bilden diese Vektoren für jedes s eine Orthonormalbasis. Setze $\alpha(s) := \int\limits_{s_0}^{s} T(\sigma)\, d\sigma$. Dann ist $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^3\right)$, da $T \in C^1$ ist und ist nach der Bogenlänge parametrisiert. Wir erhalten $\alpha' = T$ und $\alpha'' = T' = kN$. Damit folgt $k = \kappa$ und N ist die Hauptnormale an α. Wegen $k, N \in C^1$ erhalten wir $\alpha \in C^3$. Es gilt $\det(T, N, B) = 1$. Zunächst ist dies für $s = s_0$ klar und folgt dann allgemein aufgrund der Stetigkeit und dass die drei Vektoren stets eine Orthonormalbasis bilden. Somit ist B der Binormalenvektor an die Kurve α. Wegen $\tau = \langle N', B\rangle = \omega$ ist die Torsion wie angegeben.

Zur Eindeutigkeit: Nach einer Euklidischen Bewegung dürfen wir annehmen, dass eine beliebige Lösung β mit $\tilde{T}$, $\tilde{N}$ und $\tilde{B}$ in s_0

$$T = \tilde{T}, \quad N = \tilde{N}, \quad \text{und} \quad B = \tilde{B}$$

erfüllt. Aufgrund der Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen gilt dann überall $(T, N, B) = \left(\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\right)$. Nach Integration sehen wir, dass $\beta(s) - \alpha(s) = \beta(s_0) - \alpha(s_0)$ konstant ist. Somit stimmen α und β bis auf eine Euklidische Bewegung überein. □

Definition 4.22. Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ regulär. Sei $\tilde{\alpha} := \alpha \circ \varphi \colon J \to \mathbb{R}^3$ eine richtungstreue Umparametrisierung nach der Bogenlänge. Definiere
(i) die Krümmung $\kappa(t) := \tilde{\kappa}(\varphi^{-1}(t))$ von α.
(ii) das Frenetdreibein $T(t) := \tilde{T}(\varphi^{-1}(t))$, $N(t) := \tilde{N}(\varphi^{-1}(t))$, $B(t) := \tilde{B}(\varphi^{-1}(t))$ für $\kappa \neq 0$.
(iii) die Torsion $\tau(t) := \tilde{\tau} \circ \varphi^{-1}(t)$ für $\alpha \in C^3$ und $\kappa \neq 0$.

Lemma 4.23. *T, N, B, κ und τ sind wohldefiniert und es gilt für beliebige richtungstreue („+“) oder richtungsumkehrende („−“) Umparametrisierungen $\beta = \alpha \circ \varphi$ von α*

$$\begin{aligned} T_\beta &= \pm\, T_\alpha \circ \varphi, \quad N_\beta = N_\alpha \circ \varphi, \quad B_\beta = \pm B_\alpha \circ \varphi, \\ \kappa_\beta &= \kappa_\alpha \circ \varphi \quad \text{und} \quad \tau_\beta = \tau_\alpha \circ \varphi. \end{aligned}$$

Beweis. Jede reguläre C^1-Kurve lässt sich nach Theorem 3.8 nach der Bogenlänge parametrisieren. Daher können wir die Definition 4.22 verwenden.

Seien nun $\varphi_i \colon J_i \to I$ zwei orientierungserhaltende Parametertransformationen, so dass $\alpha_i := \alpha \circ \varphi_i$ jeweils nach der Bogenlänge parametrisiert sind. Dann sind $\varphi_1^{-1} \circ$

φ_2 und $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ jeweils von der Form $s \mapsto s + s_0$, bei nicht orientierungserhaltenden Transformationen auch von der Form $s \mapsto \pm s + s_0$. Die Größen aus Definition 4.22 sind wohldefiniert, es gilt nämlich

$$\begin{aligned} T(t) &\overset{\text{def.}}{=} (\alpha \circ \varphi_1)'|_{\varphi_1^{-1}(t)} \\ &= (\alpha \circ \varphi_2 \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)'|_{\varphi_1^{-1}(t)} \\ &= (\alpha \circ \varphi_2)'|_{\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \circ \varphi_1^{-1}(t)} \cdot \underbrace{\left(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1\right)'}_{=\pm 1}|_{\varphi_1^{-1}(t)} \quad \text{(Produktregel)} \\ &= \pm\, (\alpha \circ \varphi_2)'|_{\varphi_2^{-1}(t)} \end{aligned}$$

und analoge Rechnungen funktionieren auch für die anderen Größen.

Sei nun $\beta = \alpha \circ \varphi$ beliebig. Mit zwei orientierungserhaltenden Transformationen φ_α und φ_β können wir annehmen, dass $\beta \circ \varphi_\beta$ und $\alpha \circ \varphi_\alpha$ nach der Bogenlänge parametrisiert sind. Ähnlich wie bei der obigen Rechnung erhalten wir

$$\begin{aligned} T_\beta(t) &= (\beta \circ \varphi_\beta)'|_{\varphi_\beta^{-1}(t)} \\ &= \left(\alpha \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_\beta\right)'|_{\varphi_\beta^{-1}(t)} \\ &= (\alpha \circ \varphi_\alpha)|_{\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\beta^{-1}(t)} \cdot \underbrace{\left(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_\beta\right)'}_{=\pm 1}|_{\varphi_\beta^{-1}(t)} \\ &= \pm\, T_\alpha|_{\varphi(t)}, \end{aligned}$$

da $\beta \circ \varphi_\beta$ und $\alpha \circ \varphi_\alpha$ nach der Bogenlänge parametrisiert sind. Wegen $\beta \circ \varphi_\beta = (\alpha \circ \varphi_\alpha) \circ (\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_\beta)$ ist der Term in der letzten Klammer wieder von der Form $s \mapsto \pm s + s_0$.

Argumentation für die anderen Größen: Übung. □

Lemma 4.24. *Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ eine reguläre Kurve. Dann gelten für Krümmung, Frenet-Dreibein (im Falle $\kappa \neq 0$) und Torsion (im Falle $\kappa \neq 0$ und $\alpha \in C^3$)*

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{|\alpha'' - \langle \alpha'', T\rangle T|}{|\alpha'|^2} = \frac{\sqrt{|\alpha''|^2 - \langle \alpha'', T\rangle^2}}{|\alpha'|^2} = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3}, \\ T &= \frac{\alpha'}{|\alpha'|}, \quad N = \frac{\alpha'' - \langle \alpha'', T\rangle T}{|\alpha'' - \langle \alpha'', T\rangle T|}, \quad B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|} \end{aligned}$$

und

$$\tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha'|^2 \cdot |\alpha'' - \langle \alpha'', T\rangle T|^2} = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2}.$$

Beweis. Siehe Übungsaufgabe. □

Lemma 4.25. *Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ regulär und $F(x) := Sx + a$ eine Euklidische Bewegung mit $S \in O(3)$ und $a \in \mathbb{R}^3$. Dann ist $\tilde{\alpha} := F \circ \alpha$ ebenfalls regulär und es gilt*

(i) $\tilde{\kappa} = \kappa$,
(ii) $\tilde{T} = ST$, $\tilde{N} = SN$, $\tilde{B} = \det S \cdot SB$,
(iii) $\tilde{\tau} = \det S \cdot \tau$,

wobei α für Aussagen über N und τ sogar eine C^3-Frenetkurve sei.

Beweis. Es genügt, das Lemma für nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven zu zeigen. Sei also α ohne Einschränkung nach der Bogenlänge parametrisiert. Es gilt

$$(F \circ \alpha)' = S\alpha', \quad \text{und} \quad (F \circ \alpha)'' = S\alpha''.$$

Mit $S \in O(3)$ und $\kappa = |\alpha''|$ erhalten wir $\tilde{\kappa} = \kappa$ und $\tilde{T} = ST$. Somit ist $\tilde{\alpha}$ eine Frenetkurve, wenn α eine solche ist. Wir erhalten $\tilde{N} = SN$. Somit gilt $\tilde{B} = \pm SB$ und wegen $\det(T,N,B) = 1 \overset{!}{=} \det\left(\tilde{T},\tilde{N},\tilde{B}\right)$ erhalten wir aus dem Determinantenmultiplikationssatz $\tilde{B} = \det S \cdot SB$. Schließlich folgt nach Definition $\tilde{\tau} = \left\langle \tilde{N}', \tilde{B}\right\rangle = \det S \langle SN', SB\rangle = \det S \cdot \tau$. ☐

Wir können auch für Raumkurven eine lokale Normalform angeben:

Beispiel 4.26 (Lokale Graphendarstellung einer Kurve)**.** Sei $\beta \in C^3\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ eine Frenetkurve, ohne Einschränkung $0 \in I$. Nach einer orientierungserhaltenden Isometrie des $\mathbb{R}^3$ dürfen wir $T(0) = e_1$, $N(0) = e_2$ und $B(0) = e_3$ sowie $\beta(0) = 0$ annehmen.

Wir können den Beweis von Theorem 4.5 verwenden und erhalten ein $\delta > 0$ und eine Funktion $u\colon (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}^2$ mit $u(0) = 0$, so dass $\alpha\colon x \mapsto (x, u(x))$ eine Umparametrisierung von β ist. Es gilt

$$\alpha'(x) = (1, u'(x)), \quad \alpha''(x) = (0, u''(x)), \quad \alpha'''(x) = (0, u'''(x)).$$

Aus $T(x) = \frac{(1,u'(x))}{\sqrt{1+|u'(x)|^2}}$ erhalten wir $u'(0) = 0$. Für die Krümmung erhalten wir

$$\kappa(x) = \frac{\sqrt{|u''|^2 - \frac{\langle u',u''\rangle^2}{1+|u'|^2}}}{1+|u'|^2} = \frac{\sqrt{\left(1+|u'|^2\right)|u''|^2 - \langle u',u''\rangle^2}}{\left(1+|u'|^2\right)^{3/2}}.$$

Im Punkt $x = 0$ erhalten wir $\kappa(0) = |u''(0)|$ und $e_2 = N(0) = \frac{\alpha''(0)}{|\alpha''(0)|} = \frac{(0,u''(0))}{\kappa(0)}$. Wir differenzieren die Formel für $\kappa(x)$ und erhalten

$$\kappa'(0) = \frac{\langle u''(0), u'''(0)\rangle}{\kappa(0)} = \left\langle (0, u'''(0))^T, e_2\right\rangle = \left\langle u'''(0), (1,0)^T\right\rangle.$$

Als Torsion erhalten wir

$$\tau(0) = \frac{\det\left(e_1, \kappa(0)e_2, (0,u'''(0))^T\right)}{\kappa(0)^2} = \frac{\langle u'''(0), (0,1)\rangle}{\kappa(0)} = \frac{\left\langle (0,u'''(0))^T, e_3\right\rangle}{\kappa(0)}.$$

Sei nun $\alpha \in C^3$ eine Frenetkurve. Aus der Taylordarstellung erhalten wir durch Koeffizientenvergleich

$$\alpha(x) = (x, u(x)) = xe_1 + \frac{1}{2}x^2\kappa(0)e_2 + \frac{1}{6}x^3\left(\kappa'(0)e_2 + \tau(0)\kappa(0)e_3\right) + o\left(|x|^3\right).$$

4.3. **Längenvergleich und der Satz von Fenchel.** Die folgenden beiden Theoreme sind für den Beweis der Fenchelschen Ungleichung nötig.

Definition 4.27. Ein Großkreis ist der Schnitt einer Ebene durch den Ursprung mit $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Beachte: Durch zwei verschiedene Punkte auf $\mathbb{S}^2$ gibt es genau einen Großkreis.

Theorem 4.28. *Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ stückweise von der Klasse C^1. Dann gilt*

$$L(\gamma) \ge \sphericalangle(\gamma(a), \gamma(b)). \tag{4.4}$$

Bei Gleichheit durchläuft γ einen Großkreisbogen von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ ohne Richtungsumkehr.

Beweis. In Polarkoordinaten erhalten wir die Sphäre $\mathbb{S}^2$ als

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \\ \sin\vartheta \cdot \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \equiv X(\vartheta,\varphi)\colon \vartheta \in [0,\pi], \varphi \in \mathbb{R} \right\}.$$

Da $(r,\vartheta,\varphi) \mapsto r \cdot X(\vartheta,\varphi)$ für $r > 0$, $0 < \vartheta < \pi$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, gibt es zu jeder stückweisen C^1-Kurve $\alpha\colon I \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine stückweise

C^1-Kurve $w : I \to (0,\pi) \times \mathbb{R}$ mit $X \circ w = \alpha$, falls $(0,0,\pm 1) \notin \operatorname{im} \alpha$ ist: Beachte dazu dass r, der Abstand zum Ursprung, nicht auftaucht, da dieser stets konstant gleich eins ist. Aufgrund des Satzes über implizite Funktionen existiert solch eine Abbildung w zunächst nur lokal. Da aber w bis auf Addition von Vielfachen von 2π in der zweiten Komponente wohldefiniert ist, können wir dies korrigieren und erhalten die gesuchte Funktion. Schreibe $w(x) \equiv (\vartheta(x), \varphi(x))$.

Wir unterscheiden nun drei Fälle: $\gamma(a) = \gamma(b)$, $\gamma(a) \notin \{\gamma(b), -\gamma(b)\}$ und $\gamma(a) = -\gamma(b)$. Im ersten Fall gilt klarerweise (4.4). Falls $L(\gamma) = \sphericalangle(\gamma(a), \gamma(a)) = 0$ gilt, so folgt $\dot\gamma \equiv 0$ bis auf endlich viele $t \in [a,b]$. Also folgt $\gamma(t) = \gamma(a)$ für alle $t \in [a,b]$, was in diesem Fall dem Großkreisbogen von $\gamma(a)$ nach $\gamma(a)$ entspricht.

Wir betrachten nun den zweiten Fall. Orthogonale Transformationen lassen beide Seiten der Ungleichung (4.4) invariant. Wir können also annehmen, dass $\gamma(a), \gamma(b) \notin \{(0,0,-1),(0,0,1)\}$, $\gamma^3(a) < \gamma^3(b)$ und $\varphi(a) = \varphi(b)$ gelten. Sei

$$a_0 := \inf\{t \in [a,b] : \forall\, s \in [t,b] \text{ ist } \gamma^3(s) \ge \gamma^3(a)\},$$

sowie

$$b_0 := \sup\{t \in [a_0,b] : \forall\, s \in [a_0,t] \text{ ist } \gamma^3(s) \le \gamma^3(b)\}.$$

Somit gilt $\operatorname{im} \gamma^3|_{[a_0,b_0]} = [\gamma^3(a), \gamma^3(b)]$. Sei $\tilde\gamma := \gamma|_{[a_0,b_0]}$.

Da $(0,0,\pm 1) \notin \operatorname{im} \tilde\gamma$ gilt, gibt es eine stückweise C^1-Funktion

$$w : [a_0,b_0] \to (0,\pi) \times \mathbb{R}, \quad w(t) = (\vartheta(t), \varphi(t)),$$

mit $\tilde\gamma(t) = X(\vartheta(t), \varphi(t))$ für alle $t \in [a_0,b_0]$. Setze

$$\begin{aligned} \beta \colon [a_0,b_0] &\to \mathbb{S}^2, \\ \beta &:= X(\vartheta(t), 0). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} L(\tilde\gamma) &= \int\limits_{a_0}^{b_0} \left| \frac{d}{dt} X(\vartheta(t), \varphi(t)) \right| dt = \int\limits_{a_0}^{b_0} \left| \frac{\partial X}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta(t)}{dt} + \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{d\varphi(t)}{dt} \right| dt \\ &\ge \int\limits_{a_0}^{b_0} \left| \frac{\partial X}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta(t)}{dt} \right| dt = \int\limits_{a_0}^{b_0} \left| \frac{d}{dt} X(\vartheta(t), 0) \right| dt = L(\beta), \end{aligned}$$

da

$$\frac{\partial X}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \cdot \cos\varphi \\ \cos\vartheta \cdot \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \cdot \sin\varphi \\ \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial X}{\partial \varphi}$$

für alle $(\vartheta, \varphi) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}$ gilt und

$$\left| \frac{\partial X}{\partial \vartheta}(\vartheta(t), \varphi(t)) \right| = \left| \frac{\partial X}{\partial \vartheta}(\vartheta(t), 0) \right| = 1.$$

Wir haben also zwei Kurven, $\tilde\gamma$ und β, die beide die Kreise $\operatorname{im} X(\vartheta(a_0), \cdot)$ und $\operatorname{im} X(\vartheta(b_0), \cdot)$ miteinander verbinden. Die obige Abschätzung liefert, dass $L(\tilde\gamma) \ge L(\beta)$ gilt.

Nun gilt ausserdem

$$L(\beta) = \int_{a_0}^{b_0} \left| \frac{\partial X}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} \right| dt \ge \int_{a_0}^{b_0} \frac{d\vartheta}{dt}\, dt = \vartheta(b_0) - \vartheta(a_0).$$

Andererseits ist für beliebiges $\varphi_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\sphericalangle(X(\vartheta(b_0),\varphi_0),X(\vartheta(a_0),\varphi_0)) &= \arccos\langle X(\vartheta(b_0),\varphi_0),X(\vartheta(a_0),\varphi_0)\rangle \\ &= \arccos(\sin\vartheta(a_0)\cdot\sin\vartheta(b_0)+\cos\vartheta(a_0)\cdot\cos\vartheta(b_0)) \\ &= \arccos(\cos(\vartheta(b_0)-\vartheta(a_0))) \\ &= |\vartheta(b_0)-\vartheta(a_0)| = \vartheta(b_0)-\vartheta(a_0).\end{aligned}$$

Auf β angewandt erhalten wir

$$L(\gamma) \geq L(\tilde{\gamma}) \geq L(\beta) \geq \vartheta(b_0)-\vartheta(a_0) = \sphericalangle(\gamma(a),\gamma(b)).$$

Wenn überall in den obigen Ungleichungen Gleichheit gilt, dann erhalten wir aus $L(\beta) = \vartheta(b_0)-\vartheta(a_0)$, dass $\dot{\vartheta} \geq 0$ bis auf endlich viele Punkte gilt. Dann folgt aus $L(\tilde{\gamma}) = L(\tilde{\beta})$, dass $\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} \equiv 0$ bis auf endlich viele Punkte gilt und somit $\tilde{\gamma}$ auf einem Großkreis durch $\gamma(a_0),\gamma(b_0)$ verläuft. Schließlich erhält man aus $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$ auch $\gamma(t) = \gamma(a_0)$ für alle $t \in [a,a_0]$ und $\gamma(t) = \gamma(b_0)$ für alle $t \in [b_0,b]$. Also liegt γ auf einem Großkreis durch $\gamma(a),\gamma(b)$.

Wir müssen noch den Fall $\gamma(a) = -\gamma(b)$ betrachten. Sei oBdA $\gamma(a) = (0,0,-1)$ und sei γ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $t_0 \in (a,b)$ mit $\gamma^3(t_0) = 0$, so dass

$$\sphericalangle(\gamma(a),\gamma(t_0)) = \sphericalangle(\gamma(t_0),\gamma(b)) = \frac{\pi}{2}$$

gilt. Wir wenden den zweiten Fall auf $\gamma|_{[a,t_0]}$ und $\gamma|_{[t_0,b]}$ an und erhalten

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,t_0]}) + L(\gamma|_{[t_0,b]}) \geq \pi = \sphericalangle(\gamma(a),\gamma(b)).$$

Weiterhin kann Gleichheit nur gelten, falls $\gamma|_{[a,t_0]}$ einen Großkreisbogen von $\gamma(a)$ nach $\gamma(t_0)$ und $\gamma|_{[t_0,b]}$ einen Großkreisbogen von $\gamma(t_0)$ nach $\gamma(b)$ durchläuft, somit durchläuft bei Gleichheit γ einen Großkreisbogen von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$. □

Lemma 4.29. *Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine geschlossene stückweise C^1-Kurve mit $L(\gamma) \leq 2\pi$. Dann liegt γ komplett in einer Halbsphäre, d. h. in einer Menge der Form $\{x \in \mathbb{S}^2 : \langle x,e\rangle \geq 0\}$ für ein $e \in \mathbb{S}^2$. Ist $L(\gamma) < 2\pi$, so gibt es ein $e \in \mathbb{S}^2$ mit $\langle\gamma(t),e\rangle > 0$ für alle $t \in [a,b]$, γ liegt also sogar im Inneren der Halbsphäre.*

Beweis. Wähle $\tau \in [a,b]$ mit $L(\gamma|_{[a,\tau]}) = L(\gamma|_{[\tau,b]}) = L(\gamma)/2$. Setze $p := \gamma(a)$ und $q := \gamma(\tau)$. Ist $\sphericalangle(p,q) = \pi$, so gilt $L(\gamma) \geq 2\pi$, also nach Voraussetzung $L(\gamma) = 2\pi$. Nach Theorem 4.28 liegen daher $\gamma|_{[a,\tau]}$ und $\gamma|_{[\tau,b]}$ auf Großkreisen. Als e kann man eine der Normalen wählen, die zu den Ebenen gehören, auf denen die Großkreise liegen.

Sei daher ab jetzt $\sphericalangle(p,q) < \pi$. Sei ohne Einschränkung $p \neq q$. Sei e der Mittelpunkt des kürzeren Großkreisbogens von p nach q, $e = \frac{p+q}{|p+q|}$. Nach einer Drehung dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $e = e_3$ gilt. Dann ist $p = \left(p^1,p^2,p^3\right)$ mit $p^3 > 0$ und $q = \left(q^1,q^2,q^3\right) = \left(-p^1,-p^2,p^3\right)$.

Nun gilt entweder $\langle\gamma(t),e_3\rangle > 0$ für alle $t \in [a,\tau]$ oder es gibt ein $t_0 \in (a,\tau)$ mit $\langle\gamma(t_0),e_3\rangle = 0$. Im zweiten Fall definieren wir $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $S(x^1,x^2,x^3) := (x^1,x^2,-x^3)$ und

$$\tilde{\gamma}(t) := \begin{cases}\gamma(t) & \text{für } t \in [a,t_0],\\ S\gamma(t) & \text{für } t \in [t_0,\tau].\end{cases}$$

Dann ist $\tilde{\gamma}$ eine stückweise C^1-Kurve mit $\tilde{\gamma}(a) = p$ und $\tilde{\gamma}(\tau) = S(q) = -p$. Nach Theorem 4.28 erhalten wir

$$L(\gamma) = 2L(\gamma|_{[a,\tau]}) = 2L(\tilde{\gamma}) \geq 2\pi.$$

Wir erhalten $L(\gamma) = 2\pi$ und nochmals nach Theorem 4.28 durchläuft $\tilde{\gamma}$ einen halben Großkreis von p nach $S(q) = -p$. Also ist $\langle\tilde{\gamma}(t),e_3\rangle \geq 0$ für $t \in [a,t_0]$ und

$\langle\tilde{\gamma}(t), e_3\rangle \leq 0$ für $t \in [t_0, b]$. Also gilt $\langle\gamma(t), e_3\rangle \geq 0$ für alle $t \in [a, \tau]$. Eine analoge Aussage erhalten wir für $t \in [\tau, b]$.

Insgesamt folgt also, dass entweder $\langle\gamma(t), e_3\rangle > 0$ für alle $t \in [a, b]$ gilt oder es gilt $\langle\gamma(t), e_3\rangle \geq 0$ für alle $t \in [a, b]$ und $L(\gamma) = 2\pi$.

□

Theorem 4.30 (Fenchel)**.** *Sei $\alpha\colon [0, L] \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert und C^2-geschlossen. Dann gilt*

$$\int_0^L \kappa(s)\, ds \geq 2\pi$$

mit Gleichheit genau dann wenn α eine ebene, einfach geschlossene, konvexe Kurve ist.

Beweis. Sei $\alpha\colon [0, L] \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-geschlossene Kurve mit $|\alpha'| \equiv 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0, L] &\to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, \\ s &\mapsto \alpha'(s) \end{aligned}$$

eine C^1-geschlossene Kurve. Sei $e \in \mathbb{S}^2$. Es gilt

$$\int_0^L \langle\gamma(s), e\rangle\, ds = \int_0^L \frac{d}{ds}\langle\alpha(s), e\rangle\, ds = \langle\alpha(L), e\rangle - \langle\alpha(0), e\rangle = 0.$$

Somit gibt es keinen Vektor $e \in \mathbb{S}^2$ mit $\langle\gamma(s), e\rangle > 0$ für alle $s \in [0, L]$. Nach Lemma 4.29 gilt daher $L(\gamma) \geq 2\pi$. Wir erhalten also für die Krümmung κ der Kurve α

$$\int_0^L \kappa(s)\, ds = \int_0^L |\alpha''(s)|\, ds = \int_0^L |\gamma'(s)|\, ds = L(\gamma) \geq 2\pi.$$

Dies zeigt die Behauptung.

Lediglich die Aussagen für den Fall, dass die Totalkrümmung gleich 2π ist, sind noch zu zeigen.

„$\Longleftarrow$“: Wenn α eine ebene, einfach geschlossene, konvexe Kurve ist, so hat die (ebene) Krümmung κ_e der Kurve ein festes Vorzeichen (siehe Übungsaufgabe), d. h. es gilt oBdA $\kappa_e = |\kappa_e|$. Laut dem Hopfschen Umlaufsatz ist die Totalkrümmung gleich $\pm 2\pi$, woraus folgt, dass die Raumkrümmung der Kurve

$$\int_0^L \kappa(s) ds = 2\pi \tag{4.5}$$

erfüllt.

„$\Longrightarrow$“: Sei also nun α eine C^2-geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, welche die Gleichung (4.5) erfüllt. Nach Lemma 4.29 gibt es dann ein $e \in \mathbb{S}^2$ mit $\langle\gamma(s), e\rangle \geq 0$ für alle $s \in [0, L]$. Aus $\int_0^L \langle\gamma(s), e\rangle\, ds = 0$ folgt daher $\langle\gamma(s), e\rangle \equiv 0$ für alle $s \in [0, L]$. Also ist $\frac{d}{ds}\langle\alpha(s), e\rangle = \langle\gamma(s), e\rangle = 0$ und $\operatorname{im}\alpha$ liegt in einer Ebene $\{x\colon \langle x, e\rangle = c\}$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Wir zeigen nun, dass $\alpha|_{[0,L)}$ injektiv ist. Falls nicht, so gibt es ohne Einschränkung ein $\tau \in (0, L)$ mit $\alpha(0) = \alpha(\tau)$. Wir behaupten, dass $L(\gamma|_{[0,\tau]}) > \pi$ gilt. Wäre dem nicht so, so könnten wir ein $\sigma \in (0, \tau)$ mit $L(\gamma|_{[0,\sigma]}) = L(\gamma|_{[\sigma,\tau]}) \leq \pi/2$ wählen. Wir setzen $e := \gamma(\sigma)$ und erhalten nach Theorem 4.28 $\langle\gamma(s), e\rangle \geq 0$ für alle $s \in [0, \tau]$.

Andererseits ist

$$\int_0^\tau \langle \gamma(s), e\rangle\, ds = \langle \alpha(\tau), e\rangle - \langle \alpha(0), e\rangle = 0.$$

Somit ist $\langle \gamma(s), e\rangle \equiv 0$. Dies liefert für $s = \sigma$ einen Widerspruch. Wir schließen, dass

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[0,\tau]}) + L(\gamma|_{[\tau,L]}) > \pi + \pi = 2\pi$$

ist. Dies widerspricht der Annahme $L(\gamma) = 2\pi$. Daher ist $\alpha|_{[0,L)}$ wie behauptet injektiv.

Die Kurve ist auch konvex, denn es gilt aufgrund des Hopfschen Umlaufsatzes (oBdA sei die Totalkrümmung gleich 2π)

$$2\pi = \int_0^L \kappa_e(s) ds \le \int_0^L \kappa(s) ds = 2\pi.$$

Somit folgt $\kappa_e(s) = \kappa(s) = |\kappa_e(s)|$ für alle $s \in [0, L]$ und die Übungsaufgabe 4.1 zeigt, dass die Kurve konvex ist. □

5. Flächen

5.1. **Immersierte und eingebettete Flächen.** Wir möchten zunächst eine anschauliche Definition von Flächen geben, die allerdings fordert, dass eine Fläche sich nicht selbst durchdringt. Diese Definition betrachtet Flächen als Teilmengen eines Raumes.

Definition 5.1 (Untermannigfaltigkeiten)**.** Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^3$ heißt zweidimensionale *Untermannigfaltigkeit* oder *eingebettete Fläche* der Klasse C^k für ein $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$, falls es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$ von p und eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^3$, sowie einen C^k-Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ mit $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ gibt.

Beispiel 5.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $u \in C^k(\Omega)$. Dann ist

$$\operatorname{graph} u := \{(x, u(x)) \colon x \in \Omega\}$$

eine zweidimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

Beweis. Zu $p = (x, u(x)) \in M$ können wir stets $U = \Omega \times \mathbb{R}$ und $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^3$ mit $\varphi\left(x^1, x^2, x^3\right) := \left(x^1, x^2, x^3 - u\left(x^1, x^2\right)\right)$ wählen. Die Behauptung folgt dann aus dem inversen Funktionentheorem. □

Aus diesem Beispiel lässt sich auch leicht folgern, dass sich eine Menge, die sich lokal nach einer euklidischen Bewegung als Graph darstellen lässt eine Untermannigfaltigkeit ist, da die Eigenschaft eine Untermannigfaltigkeit zu sein eine lokale Eigenschaft ist.

Lokal lässt sich eine eingebettete Fläche nach einer euklidischen Bewegung auch als Graph darstellen:

Theorem 5.3. *$M \subset \mathbb{R}^3$ ist genau dann eine eingebettete Fläche der Klasse C^k, $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$, falls es zu jedem $p \in M$ eine euklidische Bewegung $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $B(p) = 0$ und offene Mengen $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $0 \in I \subset \mathbb{R}$, sowie eine Funktion $u \in C^k(\Omega, I)$ mit*

$$B(M) \cap (\Omega \times I) = \{(x, u(x)) : x \in \Omega\}.$$

gibt.

Beweis. „$\Longrightarrow$": Sei $p \in M$ und seien U, V, φ wie in der Definition von Untermannigfaltigkeiten. Dann gibt es eine Euklidische Bewegung $B^{-1}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $B^{-1}(0) = p$, so dass $\frac{\partial}{\partial x^3}(\varphi^3 \circ B^{-1})(0) \neq 0$ gilt. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es offene Mengen $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $0 \in I \subset \mathbb{R}$ sowie $u \in C^k(\Omega, I)$, so dass für $q \in \Omega \times I$

$$\varphi^3 \circ B^{-1}(q) = 0 \Longleftrightarrow q^3 = u(q^1, q^2)$$

gilt. Dies entspricht der Behauptung.
„$\Longleftarrow$": Dies folgt aus Beispiel 5.2. □

Wir wollen eine weitere nützliche Charakterisierung von eingebetteten Flächen angeben:

Theorem 5.4. *$M \subset \mathbb{R}^3$ ist genau dann eine eingebettete Fläche der Klasse C^k, $k \in \mathbb{N}_+$, falls es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$ und eine Funktion $f \in C^k(U)$ mit*

(i) $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$ und
(ii) $Df(q) \neq 0$ für alle $q \in U$

gibt.

Beweis. „$\Longrightarrow$": Sei $p \in M$. Seien U, V, φ wie in der Definition der Untermannigfaltigkeit. Sei $f := \varphi^3$. Dann folgen direkt (i) und (ii), da φ ein Diffeomorphismus ist.
„$\Longleftarrow$": Sei $p \in M$. Nach einer euklidischen Bewegung können wir annehmen, dass $\frac{\partial}{\partial x^3} f(p) \neq 0$ gilt. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt sofort, dass sich M in einer Umgebung von p als Graph darstellen lässt. Die Behauptung folgt nun aus Theorem 5.3. □

Beispiel 5.5.

(i) Die Sphäre $\mathbb{S}^2 := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon |x| = 1\right\}$ oder allgemeiner ein Ellipsoid, welches durch $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ beschrieben wird, sind zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$:
Wähle $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $f(x, y, z) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$.

(ii) Ein Hyperboloid, welches durch $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ beschrieben wird, ist eine nicht-zusammenhängende, zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$:
Wähle $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $f(x, y, z) := -x^2 - y^2 + z^2 - 1$.

Wir betrachten Flächen nun als Abbildungen, wobei wir jetzt auch zulassen, dass sich eine Fläche selbst durchdringen kann.

Definition 5.6. (Immersion). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $X \in C^k\left(\Omega, \mathbb{R}^l\right)$, $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$, heißt eine *(regulär parametrisierte) n-dimensionale C^k-Fläche* oder *n-dimensionale Immersion* der Klasse C^k, falls $\operatorname{rang} DX(x) = n$ für alle $x \in \Omega$ gilt. Wir schreiben auch dX für DX und dX_p für $DX(p)$ für $p \in \Omega$. Die Bedingung an den Rang bedeutet, dass die Vektoren

$$\frac{\partial X}{\partial x^1}(p), \ldots, \frac{\partial X}{\partial x^n}(p)$$

für alle $p \in \Omega$ linear unabhängig sind.
Ist $l = n + 1$, so heißt $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ *Hyperfläche.*
Ist $n = 2$, so heißt $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^l$ *Fläche.*

Nun können wir einige interessante Strukturen auf Flächen definieren.

Definition 5.7. (Tangentialraum, Einheitsnormale). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und X eine C^k-Immersion, $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$.

(i) Der Unterraum
$$T_xX := \operatorname{im} DX(x) = \{dX_x(v) : v \in \mathbb{R}^n\} = \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^1}(x), \ldots, \frac{\partial X}{\partial x^n}(x) \right\rangle$$
heißt *Tangentialraum* von X im Punkt $x \in \Omega$. $X(x) + \operatorname{im} DX(x)$ heißt *affiner Tangentialraum.*

(ii) Betrachte ab jetzt nur noch Flächen, also Immersionen $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen. Eine stetige Funktion $\nu\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ heißt *Einheitsnormale* an die Hyperfläche längs X, falls $|\nu(x)| = 1$ und $\nu(x) \perp \operatorname{im} DX(x)$ für alle $x \in \Omega$ gelten.

Ist Ω zusammenhängend, so gibt es genau zwei Einheitsnormalen längs X, nämlich
$$\nu^{\pm}\colon \Omega \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \nu^{\pm}(x) := \pm\frac{X_1(x) \times X_2(x)}{|X_1(x) \times X_2(x)|},$$
wobei wir die Abkürzungen $X_i(x) := \frac{\partial X}{\partial x^i}(x)$ verwendet haben.

Die Formel für die Normale gilt speziell für Flächen im $\mathbb{R}^3$, da wir das Kreuzprodukt „$\times$" benutzt haben. Alle weiteren Resultate dieses Kapitels lassen sich leicht auf n-dimensionale Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ übertragen. Eine Übertragung auf $l > n+1$ ist komplizierter; z. B. ist dann eine Einheitsnormale nicht mehr bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt (vergleiche dies mit der Situation von Raumkurven).

Beispiel 5.8 (Graphen)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen. Sei $u \in C^k$. Dann ist der Graph von u, $\operatorname{graph} u$, das Bild der parametrisierten Fläche
$$\begin{aligned} &X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3,\\ &X(x) = (x, u(x))^T \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$
Es gilt $DX(x) = (X_1, X_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix}$. Die Bedingung $\operatorname{rang} DX(x) = 2$ ist offensichtlicherweise für jede C^1-Funktion u erfüllt. Eine Normale ist durch $\nu(x) = \frac{(Du,-1)}{\sqrt{1+|Du|^2}}$ gegeben. Bei Graphen wollen wir stets die „untere" Normale, d. h. die Normale mit $\langle \nu, e_3\rangle < 0$, verwenden. Beachte: Dies ist genau die umgekehrte Wahl des Vorzeichens verglichen mit ebenen graphischen Kurven. Die Unterschiede sind historisch bedingt.

Beispiel 5.9 (Rotationsflächen)**.** Sei $\alpha\colon (a,b) \to \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x^2 = 0 \text{ und } x^1 > 0\right\}$ eine Kurve in der „rechten" Halbebene der $x^1 - x^3$-Ebene. Schreibe
$$\alpha(t) = (r(t), 0, h(t)).$$
Durch Rotation um die x^3-Achse erhalten wir eine Fläche $X\colon (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit
$$X(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ h(t) \end{pmatrix}.$$
Übung: Überprüfe, dass dies eine Fläche ist und bestimme eine Normale.

Wir geben noch Parametrisierungen für zwei bekannte Rotationsflächen an:

(i) *Zylinder*: Erhält man durch Rotation der Kurve $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (1, 0, t)$.

(ii) *Torus*: Sei $0 < r < a$. Dann erhält man einen Torus durch Rotation der Kurve $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (r\cos t + a, 0, r\sin t)$.

Lokal sind parametrisierte Flächen auch eingebettete Flächen. Global stimmt dies nicht, ein Gegenbeispiel wäre die „8"$\times\mathbb{R}$.

Theorem 5.10. *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche mit Normale ν. Dann gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ eine Umgebung $\hat{\Omega}$ von x_0, so dass $\operatorname{im} X|_{\hat{\Omega}}$ eine eingebettete Fläche ist.*

Beweis. Definiere $F\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ durch

$$F(x,t) := X(x) + t\nu(x).$$

Dann ist $DF(x_0)$ durch eine invertierbare (3×3)-Matrix dargestellt. Somit gibt es nach dem Satz von der inversen Abbildung eine Umgebung der Form $\hat{\Omega} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ von $x_0 \times \{0\}$, so dass $F|_{\hat{\Omega}\times(-\varepsilon,\varepsilon)}$ ein Diffeomorphismus auf das Bild $U := F\left(\hat{\Omega} \times (-\varepsilon, \varepsilon)\right)$ ist. □

Wir können ebenfalls zeigen, dass eingebettete Flächen lokal auch parametrisierte Flächen sind:

Definition 5.11. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit, $k \in \mathbb{N}_+$. Eine *lokale C^k-Parametrisierung* von M nahe $x_0 \in M$ ist eine C^k-Abbildung $X\colon \Omega \to M \subset \mathbb{R}^3$ mit $x_0 \in \operatorname{im} X$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen ist, X injektiv ist und $\operatorname{rang} dX_x = 2$ für alle $x \in \Omega$ gilt. Ω heißt *Parametergebiet* und $V := X(\Omega) \subset M$ heißt das *Kartengebiet* von X. Die Abbildung $X^{-1}\colon V \to \Omega$ heißt *Karte*.

Theorem 5.12 (Existenz und Eigenschaften von Karten)**.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ der Klasse C^k mit $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Zu jedem $p \in M$ gibt es eine lokale C^k-Parametrisierung $X : \Omega \to X(\Omega) =: V$ nahe p. Sei $\varphi\colon V \to \Omega$ die dazugehörige Karte.*
(ii) *Ist $X\colon \Omega \to X(\Omega) =: V$ eine lokale C^k-Parametrisierung, so ist V relativ offen in M. Die dazugehörige Karte $X^{-1}\colon V \to \Omega$ ist stetig und somit ist $X\colon \Omega \to V$ ein Homöomorphismus.*
(iii) *Seien $\varphi_i\colon V_i \to \Omega_i$, $i = 1, 2$, Karten von M. Dann ist der Kartenwechsel*

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\colon \varphi_1(V_1 \cap V_2) \to \varphi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

ein C^k-Diffeomorphismus.

Beweis.

(i) Theorem 5.3 liefert uns zu $p \in M$ eine euklidische Bewegung B, so dass $B(M)$ lokal um p als Graph einer C^k-Funktion u darstellbar ist. Dann ist $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit $X(q) := B^{-1}(q, u(q))$ die gesuchte Parametrisierung und es gilt $X(0) = p \in X(\Omega)$.
(ii) V ist relativ offen, da $F(x,t) := X(x) + t\nu(x)$ ein lokaler Diffeomorphismus nahe $t = 0$ ist. F^{-1} ist ebenfalls ein lokaler Diffeomorphismus. Somit ist die Einschränkung X^{-1} stetig und die Behauptung folgt.
(iii) Betrachte die lokalen Parametrisierungen $X_1 := \varphi_1^{-1}$ und $X_2 := \varphi_2^{-1}$. Deren Fortsetzungen $\hat{X}_i(x,t) := X_i(x) + t\nu(x)$ sind wiederum lokale Diffeomorphismen. Dies gilt auch für die Verknüpfung $\hat{X}_2^{-1} \circ \hat{X}_1$ und daher auch für die Einschränkung auf $t = 0$, also für $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$. Da Parametrisierungen und damit auch Karten (globale) Homöomorphismen sind, ist $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\colon \varphi_1(V_1 \cap V_2) \to \varphi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ auch ein (globaler) Diffeomorphismus. □

Dieses Theorem zeigt insbesondere, dass eine zwei-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ auch eine C^k-Mannigfaltigkeit ist. Wir können nun insbesondere aufgrund der dritten Eigenschaft die Differenzierbarkeit von Abbildungen auf einer Untermannigfaltigkeit definieren:

Definition 5.13. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zwei-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ der Klasse C^k mit $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$. Sei $f : V \to \mathbb{R}$, $V \subset M$ offen, eine Abbildung und $p \in M$. Wir sagen, dass f in p von der Klasse C^l mit $l \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$, $l \le k$, ist, falls für eine lokale C^k-Parametrisierung X von M nahe p die Abbildung $f \circ X$ in $X^{-1}(p)$ von der Klasse C^l ist.

Falls wir immersierte Flächen betrachten, so sollten die darauf definierten Strukturen unabhängig von der konkreten Parametrisierung sein. Das eben bewiesene Theorem legt die folgende Definition nahe.

Definition 5.14. Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine C^1-Fläche. Dann heißt $\hat{X} : \hat{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ *Umparametrisierung* von X, falls es einen Diffeomorphismus $\varphi : \hat{\Omega} \to \Omega$ mit

$$\hat{X} = X \circ \varphi$$

gibt.

Der Diffeomorphismus φ ist i. a. nicht eindeutig bestimmt, wenn X nicht bereits injektiv ist. Z. B. stimmen $X(t, \vartheta) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, t)$, $(t, \vartheta) \in \mathbb{R}^2$, und $X \circ \varphi_k$ mit $\varphi_k(t, \vartheta) := (t, \vartheta + 2\pi k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ überein.

Auf der Menge der parametrisierten C^1-Flächen ist die Relation

$$X \sim \hat{X} \quad :\Longleftrightarrow \hat{X} \text{ ist eine Umparametrisierung von } X$$

eine Äquivalenzrelation.

Für C^k-Flächen und C^k-Diffeomorphismen verwenden wir analoge Definitionen.

Wir möchten nun noch eine anschauliche Darstellung des Tangentialraums für eingebettete Flächen nachweisen. Hierzu zunächst die folgende Definition:

Definition 5.15 (Tangentialebene)**.** Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Dann heißt $V \in \mathbb{R}^3$ *Tangentialvektor* in $p \in M$, falls es eine Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = V$ gibt. Die Menge aller Tangentialvektoren in p bezeichnen wir als *Tangentialraum* im Punkt $p \in M$, T_pM.

Das folgende Theorem zeigt nun, dass die zwei Definitionen des Tangentialraums übereinstimmen.

Theorem 5.16. *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Dann ist T_pM ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ und es gilt*

(i) $T_pM = \operatorname{im} dX_x = T_xX$ *für eine lokale Parametrisierung* $X : \Omega \to M$ *mit* $X(x) = p$.
(ii) $T_pM = \ker df_p$, *falls* $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$ *für eine offene Menge* U *mit* $p \in U$ *und für* $f \in C^1(U)$ *mit* $df \neq 0$ *in* U *gilt.*

Beweis. Sei $X(x) = p$. Die Inklusionen $\operatorname{im} dX_x \subset T_pM \subset \ker df_p$ folgen direkt nach Definition. Wegen $\dim \operatorname{im} dX_x = 2$ und $\dim \ker df_p = 2$ gilt jedoch überall Gleichheit. □

6. Induzierte Metrik

Wir möchten nun eine Größe definieren, welche intrinsisch die Länge von Tangentialvektoren mißt, d.h. wir möchten Längen messen, ohne uns auf den umliegenden Raum $\mathbb{R}^3$ beziehen zu müssen. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine injektive C^1-Immersion. Dann lässt sich jede C^1-Kurve $\tilde{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{im} \tilde{\gamma} \subset X(\Omega)$ um jedes $t \in (a, b)$ als $\tilde{\gamma} = X \circ \gamma$ mit $\gamma \in C^1([t - \varepsilon, t + \varepsilon], \Omega)$ darstellen für ein $\varepsilon > 0$.

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}|\dot{\tilde{\gamma}}|^2 &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \delta_{\alpha\beta} \dot{\tilde{\gamma}}^\alpha \dot{\tilde{\gamma}}^\beta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \sum_{i,j=1}^{2} \delta_{\alpha\beta} X_i^\alpha \dot{\gamma}^i \dot{X}_j^\beta \gamma^j \\ &= \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j =: |\dot{\gamma}|_g^2,\end{aligned}$$

wobei wir $g_{ij} := \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \delta_{\alpha\beta} X_i^\alpha X_j^\beta$ gesetzt haben. Wir können also die euklidische Länge des Tangentialvektors an die Kurve $\tilde{\gamma}$ bestimmen, indem wir die Länge des entsprechenden Tangentialvektors von γ bezüglich der auf dem Tangentialraum *induzierten Metrik* (g_{ij}) messen. Dabei haben wir die Komponenten von Vektoren im $\mathbb{R}^3$ mit griechischen Indices bezeichnet und die Euklidische Metrik des $\mathbb{R}^3$ mit $\delta_{\alpha\beta}$. In der Differentialgeometrie ist es üblich, die Einsteinsche Summenkonvention zu verwenden. Hierbei wird über doppelt auftretende Indizes summiert. Beispielsweise schreiben wir

$$|\dot{\gamma}|_g^2 = g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = \delta_{\alpha\beta} X_i^\alpha \dot{\gamma}^i \dot{X}_j^\beta \gamma^j.$$

Die Einsteinsche Summenkonvention erfordert hier also eine Summation über mehrfache griechische Indices von 1 bis 3, während mehrfache lateinische Indices von 1 bis 2 summiert werden. Es ist üblich, lateinische Indices für Größen im Definitionsgebiet und griechische Indices für Größen im Zielraum zu verwenden.

Definition 6.1 (Erste Fundamentalform)**.** Sei $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ eine reguläre Fläche ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei offen). Dann heißt die Bilinearform

$$g_x(u,v) := g(x)\langle u, v\rangle := \langle dX_x(v), dX_x(u)\rangle$$

für $x \in \Omega$ und $u, v \in \mathbb{R}^2$ die erste Fundamentalform von X.

$$g \in C^0\left(\Omega, L^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2; \mathbb{R}\right)\right)$$

ist eine stetige Abbildung von Ω in den Raum der bilinearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Bezüglich der Standardbasis ist g durch die Koeffizienten(funktionen)

$$\begin{aligned}&g_{ij} \colon \Omega \to \mathbb{R}, \\ &g_{ij}(x) := \langle X_i(x), X_j(x)\rangle \equiv \langle dX_x(e_i), dX_x(e_j)\rangle\end{aligned}$$

für $1 \le i, j \le 2$ gegeben. Die zugehörige Matrix $G = (g_{ij})_{1\le i,j\le 2}$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ sei $G \colon \Omega \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ und ist durch $G(x) := dX_x^T dX_x$ gegeben.

Es folgt also direkt das folgende Lemma:

Lemma 6.2. *Sei $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ eine (reguläre) Fläche und $\gamma \in C^1(I, \Omega)$ eine Kurve. Dann gilt*

$$L(X \circ \gamma) = \int\limits_I \sqrt{g(\gamma(t))\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle}\, dt = \int\limits_I \|\gamma'(t)\|_{g(\gamma(t))}\, dt.$$

Bemerkung 6.3.

(i) Für jedes $x \in \Omega$ ist $g(x)$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

a) $g(x)$ ist symmetrisch:

$$g_x(u,v) = \langle dX_x(u), dX_x(v)\rangle = \langle dX_x(v), dX_x(u)\rangle = g_x(v,u).$$

Daher ist auch die Matrix $G = (g_{ij})$ symmetrisch: $g_{ij} = g_{ji}$ für alle $1 \le i, j \le 2$.

b) $g(x)$ ist bilinear: Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v_1, v_2, u \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g_x(\lambda v_1 + \mu v_2, u) &= \langle dX_x(\lambda v_1 + \mu v_2), dX_x(u)\rangle \\ &= \langle \lambda dX_x(v_1) + \mu dX_x(v_2), dX_x(u)\rangle \\ &= \lambda\langle dX_x(v_1), dX_x(u)\rangle + \mu\langle dX_x(v_2), dX_x(u)\rangle \\ &= \lambda g_x(v_1, u) + \mu g_x(v_2, u). \end{aligned}$$

Da $g(x)$ symmetrisch ist, ist es auch in der zweiten Komponente linear.

c) $g(x)$ ist positiv definit: Sei $v \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$g_x(v, v) = \langle dX_x(v), dX_x(v)\rangle = |dX_x(v)|^2 \geq 0.$$

Im Falle von Gleichheit folgt aus der Dimensionsformel $\dim\ker dX_x = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{im} dX_x = 0$. Also ist dX_x injektiv und es folgt $v = 0$.

(ii) Die Abbildung $dX_x\colon \big(\mathbb{R}^2, g(x)\big) \to (\operatorname{im} dX_x, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3})$ ist eine Isometrie zwischen Euklidischen Vektorräumen. Es gilt nämlich

$$|dX_x(v)|^2_{\mathbb{R}^3} = g_x(v, v) = \|v\|^2_{g(x)}.$$

(iii) Seien $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann erfüllt der Winkel zwischen $dX_x(u)$ und $dX_x(v)$ aufgrund der Isometrieeigenschaft

$$\begin{aligned} \sphericalangle(dX_x(u), dX_x(v)) &= \arccos \frac{\langle dX_x(u), dX_x(v)\rangle}{|dX_x(u)| \cdot |dX_x(v)|} \\ &= \arccos \frac{g_x(u, v)}{\|u\|_{g(x)} \cdot \|v\|_{g(x)}} =: \sphericalangle_{g(x)}(u, v). \end{aligned}$$

(iv) Ein Skalarprodukt, das von $x \in \Omega$ abhängt, heißt *Riemannsche Metrik* auf Ω. Ist klar, an welchem $x \in \Omega$ das Skalarprodukt $g(x)\langle\cdot,\cdot\rangle$ ausgewertet wird, schreibt man häufig $g(u, v)$ statt $g_x(u, v)$.

(v) Statt von der ersten Fundamentalform sprechen wir auch von der (induzierten) Metrik, die aber etwas anderes als die Metrik $d(\cdot,\cdot)$ eines metrischen Raumes ist.

Beispiel 6.4 (Erste Fundamentalform von Graphen)**.** Sei X mit $X(x) = (x, u(x))$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, ein Graph. Dann erhalten wir $X_i(x) = (e_i, u_i(x))$ und

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + u_i(x)u_j(x).$$

Theorem 6.5 (Transformationsverhalten der Metrik)**.** *Sei $X \in C^1\big(\Omega, \mathbb{R}^3\big)$ eine reguläre Fläche.*

(i) Sei $\varphi\colon \hat\Omega \to \Omega$ ein Diffeomorphismus, also $\hat X := X \circ \varphi$ eine Umparametrisierung von X. Dann gilt für die zugehörigen Metriken

$$\hat g_x(v, w) = g_{\varphi(x)}(d\varphi_x(v), d\varphi_x(w))$$

oder, äquivalent dazu, mit $G = (g_{ij})$ und $\varphi^k_i = \frac{\partial\varphi^k}{\partial x^i}$

$$\hat g_{ij}(x) = g_{kl}(\varphi(x))\varphi^k_i(x)\varphi^l_j(x).$$

(ii) Ist $B\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Euklidische Bewegung und $\hat X = B \circ X$, so gilt $\hat g = g$.

Beweis.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned} \hat g(v, w) &= \langle d(X \circ \varphi)(v), d(X \circ \varphi)(w)\rangle = \langle (dX)|_\varphi d\varphi(v), (dX)|_\varphi d\varphi(w)\rangle \\ &= g|_\varphi(d\varphi(v), d\varphi(w)). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\hat g_{ij} = \hat g(e_i, e_j) = g|_\varphi(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)) = g|_\varphi(\varphi_i, \varphi_j) = g_{kl}|_\varphi \varphi^k_i \varphi^l_j.$$

(ii) Wir stellen B in der Form $Bx = Sx + a$ mit $S \in O(3)$ und $a \in \mathbb{R}^3$ dar. Dann gilt $dB_x(y) = Sy$. Also folgt

$$\begin{aligned}\hat{g}(x)\langle v, w\rangle &= \langle d(B \circ X)_x(v), d(B \circ X)_x(w)\rangle \\ &= \langle SdX_x(v), SdX_x(w)\rangle = \langle dX_x(v), dX_x(w)\rangle \\ &= g(x)\langle v, w\rangle. \end{aligned}$$ □

Bemerkung 6.6. Seien $u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ beliebig. Dann hat das von ihnen aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} A &= |u| \cdot \underbrace{\left| v - \left\langle v, \frac{u}{|u|} \right\rangle \frac{u}{|u|} \right|}_{=\text{Höhe}} \\ &= \sqrt{\left\langle v|u| - \langle v, u\rangle \frac{1}{|u|} u, v|u| - \langle v, u\rangle \frac{1}{|u|} u \right\rangle} \\ &= \sqrt{|v|^2|u|^2 - 2\langle u, v\rangle^2 + \langle u, v\rangle^2} \\ &= \sqrt{|v|^2|u|^2 - \langle u, v\rangle^2}. \end{aligned}$$

Damit das Flächenelement nach Integration für affin lineare Funktionen auf rechteckigen Gebieten den für Parallelogramme bekannten Wert ergibt, setzen wir für $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$

$$\begin{aligned} dA := A(X_1, X_2)\, dx^1 dx^2 &= \sqrt{|X_1|^2|X_2|^2 - \langle X_1, X_2\rangle^2}\, dx \\ = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, dx &= \sqrt{\det(g_{ij}(x))}\, dx. \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass der damit definierte Flächeninhalt für injektive Immersionen $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit dem zweidimensionalen Hausdorffmaß $\mathcal{H}^2(\operatorname{im} X)$ übereinstimmt.

Definition 6.7. Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion. Dann definieren wir den Flächeninhalt von X als

$$A(X) := \int\limits_{\Omega} \sqrt{\det(g_{ij})} =: A_g(\Omega).$$

Beispiel 6.8. Sei X mit $X(x) = (x, u(x))$, $x \in \Omega$, ein Graph. Dann gilt $\det(g_{ij}) = \det(\delta_{ij} + u_i u_j) = 1 + |Du|^2 = 1 + u_1^2 + u_2^2$. Somit erhalten wir

$$A(X) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2} = \int\limits_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2}.$$

Nun wollen wir herleiten, dass Bogenlänge, Winkel und Flächeninhalt von der Wahl der speziellen Parametrisierung unabhängig sind. Beachte, dass wir dazu lediglich das Transformationsverhalten der Metrik und nicht die Abbildung X benutzen werden.

Korollar 6.9. *Sei $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ eine reguläre Fläche. Sei $\varphi \in C^1\left(\hat{\Omega}, \Omega\right)$ ein Diffeomorphismus und $\hat{X} = X \circ \varphi$ eine Umparametrisierung von X. Wir bezeichnen die induzierten Metriken von X und $\hat{X}$ mit g bzw. $\hat{g}$. Dann gelten die folgenden Beziehungen für Länge, Winkel und Flächeninhalt:*

(i) $L_g(\varphi \circ \gamma) = L_{\hat{g}}(\gamma)$ *für alle C^1-Kurven $\gamma\colon I \to \hat{\Omega}$.*
(ii) $\sphericalangle_{g(\varphi(x))}(d\varphi(x)\langle v\rangle, d\varphi(x)\langle w\rangle) = \sphericalangle_{\hat{g}(x)}(v, w)$ *für alle $x \in \hat{\Omega}$ und alle $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.*
(iii) $A_g(\varphi(E)) = A_{\hat{g}}(E)$ *für alle messbaren Teilmengen $E \subset \hat{\Omega}$.*

Beweis. Nach Theorem 6.5 gilt $g(\varphi(x))\langle d\varphi(x)\langle v\rangle, d\varphi(x)\langle w\rangle\rangle = \hat{g}\langle v,w\rangle$. Somit ist

$$\|d\varphi(x)\langle v\rangle\|_{g(\varphi(x))} = \|v\|_{\hat{g}(x)} \quad \text{und} \quad \sphericalangle_{g(\varphi(x))}(d\varphi(x)\langle v\rangle, d\varphi(x)\langle w\rangle) = \sphericalangle_{\hat{g}(x)}(v,w).$$

Nach Kettenregel gilt $(\varphi\circ\gamma)'(t) = d\varphi|_{\gamma(t)}\gamma'(t)$. Somit erhalten wir

$$L_g(\varphi\circ\gamma) = \int\limits_I \|d\varphi|_{\gamma(t)}\gamma'(t)\|_{g(\varphi(\gamma(t)))}\,dt = \int\limits_I \|\gamma'(t)\|_{\hat{g}(\gamma(t))}\,dt = L_{\hat{g}}(\gamma).$$

Schließlich erhalten wir aus dem Transformationsverhalten der Metrik, der Transformationsformel für Integrale und der Determinantenmultiplikationsformel

$$\begin{aligned} A_g(\varphi(E)) &= \int\limits_{\varphi(E)} \sqrt{\det G} = \int\limits_E \sqrt{\det G\circ\varphi}\cdot|\det d\varphi| \\ &= \int\limits_E \sqrt{\det((d\varphi)^T(G\circ\varphi)d\varphi)} = A_{\hat{g}}(E). \end{aligned}$$ □

Beispiel 6.10. Als Anwendung wollen wir nun die Oberfläche eines Torus berechnen, wobei wir annehmen, dass es hierfür genügt, die Fläche der Parametrisierung

$$X:(0,2\pi)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3, \quad (x,y)\mapsto((a+r\cos x)\cos y,(a+r\cos x)\sin y, r\sin x)$$

zu berechnen. Hierbei sind $r,a\in\mathbb{R}_+$ mit $0<r<a$. In dieser Parametrisierung erhalten wir als Koeffizienten der Metrik:

$$g_{11}=r^2, \quad g_{12}=g_{21}=0, \quad g_{22}(x)=(r\cos x+a)^2.$$

Somit gilt $\sqrt{\det g} = r(r\cos x+a)$, woraus wir schließen

$$A(X) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(r\cos x+a)\,dx\,dy = 2\pi r^2(\sin 2\pi - \sin 0) + ra(2\pi)^2 = 4\pi^2 ra.$$

7. Zweite Fundamentalform

7.1. **Zweite Fundamentalform und Weingartenabbildung.** Wir weisen auch in diesem Kapitel darauf hin, wenn sich Aussagen nicht direkt auf Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ übertragen lassen.

Definition 7.1. Sei $X\in C^2\left(\Omega,\mathbb{R}^3\right)$ regulär mit einer Einheitsnormalen $\nu\colon\Omega\to\mathbb{S}^2$ längs X. Dann heißt A mit

$$A(x)\langle v,w\rangle := -\left\langle d^2X(x)\langle v,w\rangle,\nu\right\rangle$$

für $x\in\Omega$ und $v,w\in\mathbb{R}^2$ *zweite Fundamentalform* von X bezüglich ν. Wie die Metrik ist auch die zweite Fundamentalform $A\in C^0\left(\Omega,L^2\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2;\mathbb{R}\right)\right)$ eine stetige Abbildung von Ω in den Raum der bilinearen Abbildungen $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

Bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ hat $A=(h_{ij})_{1\le i,j\le 2}$ die Koeffizienten

$$h_{ij}(x) = -\langle X_{,ij}(x),\nu(x)\rangle$$

für $1\le i,j\le 2$, wobei $X_{,ij} := \frac{\partial^2 X}{\partial x^i\partial x^j}$ mit dem Komma darauf hinweist, dass es sich um partielle Ableitungen handelt. (Solange noch keine Verwechslungsgefahr mit kovarianten Ableitungen besteht, könnten wir auch X_{ij} schreiben.)

Beispiel 7.2. Sei $X(x)=(x,u(x))$, $x\in\Omega$ ein Graph. Dann gilt

$$\nu = \frac{(Du,-1)}{\sqrt{1+|Du|^2}} \quad \text{und} \quad g_{ij} = \delta_{ij}+u_iu_j.$$

Die zweite Fundamentalform ist wegen $X_{,ij} = (0,u_{,ij})$ durch $A=(h_{ij})$ mit

$$h_{ij} = -\langle X_{,ij},\nu\rangle = \frac{u_{,ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}}$$

gegeben.

Das folgende Lemma ist eigentlich ein Resultat der Linearen Algebra.

Lemma 7.3. *Sei $g(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt und $B(\cdot,\cdot)$ mit Matrixdarstellung (b_{ij}) eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit*

$$B(v,w) = g(v,Sw) \quad \text{für alle } v,w \in \mathbb{R}^n.$$

Ist B symmetrisch, so ist S bezüglich $g(\cdot,\cdot)$ selbstadjungiert, d. h. es gilt

$$g(Sv,w) = g(v,Sw) \quad \text{für alle } v,w \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Sei $\left(g^{ij}\right)$ die inverse Matrix zu (g_{ij}), d. h. gelte $\sum\limits_{j=1}^n g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$ für alle $1 \le i,k \le n$. Wir definieren $S = \left(S^i_j\right)_{1\le i,j\le n}$ durch $S^j_l := \sum\limits_{k=1}^n g^{jk}b_{kl}$ für $j,l = 1,\ldots,n$.

Wir rechnen die behauptete Gleichheit für Elemente der Standardbasis nach. Es gilt $Se_l = \sum\limits_{j=1}^n S^j_l e_j$ und daher folgt

$$g(e_i, Se_l) = \sum_{j=1}^n g_{ij}S^j_l = \sum_{j,k=1}^n g_{ij}g^{jk}b_{kl} = \sum_{k=1}^n \delta^k_i b_{kl} = b_{il}.$$

Die Eindeutigkeit von S ist einfach einzusehen. Ist B symmetrisch, so folgt direkt, dass S selbstadjungiert ist. □

Definition 7.4. Sei $X \in C^2\left(\Omega,\mathbb{R}^3\right)$ eine Fläche mit Normale ν längs X. Sei $A = (h_{ij})$ die zweite Fundamentalform von X. Dann heißt die eindeutig bestimmte Abbildung $S(x)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$A(x)\langle v,w\rangle = g(x)\langle v,Sw\rangle \quad \text{für alle } v,w \in \mathbb{R}^2$$

Weingartenabbildung von X. Bezüglich der Standardbasis hat sie die Matrixdarstellung

$$S(x)e_k = S^i_k(x)e_i \quad \text{mit} \quad S^i_k(x) = g^{ij}(x)h_{jk}(x).$$

Die Weingartenabbildung $S(x)$ ist für alle $x \in \Omega$ bezüglich $g(x)$ selbstadjungiert.

Bemerkung 7.5. Im Allgemeinen ist $\{e_1, e_2\}$ keine Orthogonalbasis bezüglich der Metrik $g(x)$ und die Matrix von S bezüglich der Standardbasis ist nicht symmetrisch.

Für die Weingartenabbildung S ist die Matrixschreibweise $S = \left(h^i_j\right)_{1\le i,j\le 2}$ mit $h^i_j = g^{ik}h_{kj}$ üblich. Man sagt, ein Index sei mit Hilfe der Metrik gehoben.

Theorem 7.6 (Weingartengleichung)**.** *Sei $X \in C^2\left(\Omega,\mathbb{R}^3\right)$ regulär mit zweiter Fundamentalform $A = (h_{ij})$ und Weingartenabbildung $S = \left(h^i_j\right)$ bezüglich der Normalen ν. Dann gilt*

$$d\nu = dX\cdot S \quad \textit{und} \quad A(v,w) = \langle d\nu(v), dX(w)\rangle$$

bzw. in Koordinaten

$$\nu_i \equiv \frac{\partial\nu}{\partial x^i} = h^k_i X_k \quad \textit{und} \quad h_{ij} = \langle \nu_i, X_j\rangle = \delta_{\alpha\beta}\nu^\alpha_i X^\beta_j.$$

In dieser Notation wird $G = (DX)^T DX$ zu

$$g_{ij} = \delta_{\alpha\beta}X^\alpha_i X^\beta_j$$

und aus $0 = \langle dX(V), \nu\rangle$ für alle $V \in \mathbb{R}^2$ wird

$$0 = \delta_{\alpha\beta}\nu^\alpha X^\beta_i V^i.$$

Diese Formel gilt auch ohne V^i. Die Definition der zweiten Fundamentalform wird zu
$$h_{ij} := -\delta_{\alpha\beta} X^\alpha_{,ij} \nu^\beta$$
und die Transformationsformel für die Metrik zu $\hat{X} = X \circ \varphi$ wird zu
$$\hat{g}_{ij} = g_{kl} \varphi^k_i \varphi^l_j.$$

Beide Schreibweisen haben Vorteile; so erleichtern weniger Indices die Übersicht, wird es jedoch komplizierter, gibt es in Indexnotation weniger mögliche Missverständnisse und die Indexnotation ist bei Rechnungen meist einfacher zu handhaben. Es ist ratsam, beide Notationen zu beherrschen.

Beweis. Aus $\langle \nu, \nu \rangle = 1$ folgt $0 = \frac{\partial}{\partial x^i} \langle \nu, \nu \rangle = 2 \langle \nu, \nu_i \rangle$. Es gilt
$$\begin{aligned} \langle \nu_j, X_k \rangle &= \frac{\partial}{\partial x^j} \underbrace{\langle \nu, X_k \rangle}_{=0} - \langle \nu, X_{,jk} \rangle = h_{jk} = A(e_j, e_k) \\ &= g(Se_j, e_k) = \langle dX(Se_j), dX(e_k) \rangle. \end{aligned}$$
Aus der ersten Gleichung folgt $\langle d\nu(v), \nu \rangle = 0$, aus der zweiten $\langle d\nu(v), dX(w) \rangle = \langle dX(Sv), dX(w) \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$. Die erste Behauptung folgt, da die erste dieser beiden Gleichungen gerade das Skalarprodukt der behaupteten Gleichheit mit ν und die zweite das Skalarprodukt mit $dX(w)$ liefert, die Gleichung also beim Test mit einer Orthonormalbasis stimmt.

Zur zweiten Behauptung: Es gilt aufgrund der ersten Behauptung
$$A(v, w) = g(Sv, w) = \langle dX(Sv), dX(w) \rangle = \langle d\nu(v), dX(w) \rangle.$$
Daraus liest man auch direkt die Formeln in Koordinaten ab.

Wir leiten sie noch einmal unabhängig davon in Koordinatenschreibweise her: Es gilt $1 = \nu^\alpha \delta_{\alpha\beta} \nu^\beta$. Differenzieren nach x^i liefert $0 = 2\nu^\alpha_i \delta_{\alpha\beta} \nu^\beta$. Jeder Vektor in $\mathbb{R}^3$ lässt sich in der Form $a^k X_k + b\nu$ darstellen. Also gibt es Funktionen a^k_i und b_i mit $\nu_i = a^k_i X_k + b_i \nu$. Wir setzen dies in die obige Gleichung ein und erhalten $0 = \nu^\alpha_i \delta_{\alpha\beta} \nu^\beta = a^k_i X^\alpha_k \delta_{\alpha\beta} \nu^\beta + b_i \nu^\alpha \delta_{\alpha\beta} \nu^\beta = 0 + b_i$. Also gilt $\nu_i = a^k_i X_k$. Wir differenzieren $0 = \nu^\alpha \delta_{\alpha\beta} X^\alpha_j$, $j = 1, 2$, setzen die Gleichung für ν_i ein und erhalten
$$0 = \nu^\alpha_i \delta_{\alpha\beta} X^\beta_j + \nu^\alpha \delta_{\alpha\beta} X^\beta_{,ji} = a^k_i X^\alpha_k \delta_{\alpha\beta} X^\beta_j - h_{ij} = a^k_i g_{kj} - h_{ij}.$$
Wir multiplizieren dies mit g^{jl} und erhalten $a^l_i = a^k_i \delta^l_k = a^k_i g_{kj} g^{jl} = h_{ij} g^{jl} = h^l_i$. Somit gilt $\nu_i = h^l_i X_l$ oder $\nu^\alpha_i = h^l_i X^\alpha_l$.

Weiterhin gilt
$$\nu^\alpha_i \delta_{\alpha\beta} X^\beta_j = h^k_i X^\alpha_k \delta_{\alpha\beta} X^\beta_j = h_{il} g^{lk} g_{kj} = h_{il} \delta^l_j = h_{ij}.$$
□

Beispiele 7.7.
(i) Ebene
(ii) Kugel
(iii) Zylinder

Theorem 7.8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend. Sei $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ mit Normale ν und zweiter Fundamentalform A. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
(i) $X(\Omega)$ liegt in einer Ebene,
(ii) $A \equiv 0$ und
(iii) ν ist konstant.

Beweis.
„(i)$\Longrightarrow$(ii)“: Liegt $X(\Omega)$ in einer affinen Ebene $p+E$, so bilden X_1, X_2 eine Basis von E und ν ist ein Normalenvektor von E. Da auch $X_{,ij}$ in E liegt, folgt $h_{ij} = -\langle X_{,ij}, \nu\rangle = 0$.

„(ii)$\Longrightarrow$(iii)“: Aus $A = (h_{ij}) \equiv 0$ folgt $S = \left(h^i_j\right) = 0$. Somit ist $d\nu = dX \cdot S = 0$ aufgrund der Weingartengleichung. Da Ω zusammenhängend ist, ist ν konstant.

„(iii)$\Longrightarrow$(i)“: Ist ν konstant, so folgt $d\langle X, \nu\rangle = \langle dX, \nu\rangle + \langle X, d\nu\rangle = 0$. Somit ist $\langle X, \nu\rangle$ konstant. Da ν konstant ist, besagt dies, dass $X(x)$ in einer Ebene liegt. $\square$

Theorem 7.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend. Sei $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ und $R > 0$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) $X(\Omega)$ liegt in einer Späre vom Radius R und
(ii) $A = \pm\frac{1}{R}G$ bzw. $S = \pm\frac{1}{R}\mathbb{1}$ oder, in Koordinaten, $h_{ij} = \pm\frac{1}{R}g_{ij}$ bzw. $h^i_j = \pm\frac{1}{R}\delta^i_j$.

Weiterhin ist die Existenz eines $p \in \mathbb{R}^3$, so dass in jedem Punkt $X-p$ ein Vielfaches von ν ist, äquivalent zur Tatsache, dass $X(\Omega)$ in einer Späre von nicht spezifiziertem Radius um p liegt.

Beweis.
„(i)$\Longrightarrow$(ii)“: Sei $m \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Definiere $f(x) := \frac{1}{2}|X(x) - m|^2$. Dann gilt

$$f_i = \langle X - m, X_i\rangle \quad \text{und} \quad f_{,ij} = \langle X - m, X_{,ij}\rangle + g_{ij}.$$

Sei nun m der Mittelpunkt der Sphäre in welcher $X(\Omega)$ enthalten ist. Dann ist f konstant. Wir schließen also, dass $X - m \perp \operatorname{im} dX$ gilt. Somit ist $X - m$ ein Vielfaches von ν. (Dies zeigt die Richtung „$\Longleftarrow$“ für die letzte Behauptung.) Da die Sphäre den Radius R hat, gilt $|X - m| = R$ und wegen $|\nu| = 1$ folgt $X - m = \pm R\nu$. Somit erhalten wir

$$0 = f_{,ij} = \langle \pm R\nu, X_{,ij}\rangle + g_{ij} = \mp R h_{ij} + g_{ij}.$$

„(ii)$\Longrightarrow$(i)“: Setze $\rho := X \pm R\nu$. Dann folgt bei geeigneter Vorzeichenwahl nach Voraussetzung mit Hilfe der Weingartengleichung

$$\rho_j = X_j \pm R\nu_j = X_j \pm R h^k_j X_k = X_j \pm R\left(\pm\frac{1}{R}\delta^k_j\right) X_k = 0.$$

Also ist $\rho \in \mathbb{R}^3$ konstant und aus $X = \rho \mp R\nu$ folgt, dass $\operatorname{im} X$ in einer Sphäre vom Radius R um ρ enthalten ist.

„$\Longleftarrow$“: Siehe oben.

„$\Longrightarrow$“: Gelte $X - p = r(x)\nu$. Sei ohne Einschränkung $p = 0$. Setze $f := |X - r_0\nu|^2$ für $r_0 := r(q)$ für ein festes $q \in \Omega$. Es gilt

$$f_i = 2\langle X_i - r_0\nu_i, X - r_0\nu\rangle = 2\langle X_i - r_0 h^k_i X_k, (r(x) - r_0)\nu\rangle = 0$$

für $x \in \Omega$. Somit ist $f \equiv 0$ und die Behauptung folgt. $\square$

Theorem 7.10 (Transformationsverhalten der zweiten Fundamentalform)**.** *Sei $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ eine Fäche mit zweiter Fundamentalform A (bezüglich der Normalen ν).*

(i) Ist $\varphi\colon \hat\Omega \to \Omega$ ein C^2-Diffeomorphismus und $\hat X := X \circ \varphi$, so gilt für die zweite Fundamentalform $\hat A = \left(\hat h_{ij}\right)$ von $\hat X$ bezüglich $\hat\nu = \nu \circ \varphi$

$$\hat A(v, w) = A|_\varphi(d\varphi(v), d\varphi(w)) \quad \textit{bzw.} \quad \hat h_{ij} = h_{kl}\varphi^k_i \varphi^l_j$$

und für die Weingartenabbildung

$$\hat S = (d\varphi)^{-1} S|_\varphi d\varphi \quad \textit{bzw.} \quad \hat h^i_j = (\varphi^{-1})^i_k h^k_l \varphi^l_j.$$

(ii) *Sei $\hat{X} = QX + a$ mit $Q \in O(3)$ und $a \in \mathbb{R}^3$ die Fläche verknüpft mit einer Euklidischen Bewegung. Dann gilt $\hat{A} = A$ und $\hat{S} = S$ bezüglich der Normalen $\hat{\nu} = Q\nu$.*

Beweis. Wir führen den Beweis in Koordinaten.

(i) Nach Ketten- und Produktregel erhalten wir $\hat{X}_i = X_k \varphi^k_i$ und

$$\hat{X}_{,ij} = X_{,kl}\varphi^k_i\varphi^l_j + X_k\varphi^k_{,ij}.$$

Die Definition der zweiten Fundamentalform liefert

$$\hat{h}_{ij} = -\left\langle \hat{X}_{,ij}, \hat{\nu}\right\rangle = -\varphi^k_i\varphi^l_j\langle X_{,kl}, \nu\rangle = h_{kl}\varphi^k_i\varphi^l_j.$$

Aus $\hat{g}_{ij} = g_{kl}\varphi^k_i\varphi^l_j$ erhalten wir $\hat{g}^{ij} = g^{kl}(\varphi^{-1})^i_k(\varphi^{-1})^j_l$. Somit folgt

$$\hat{h}^i_j = \hat{g}^{ik}\hat{h}_{kj} = (\varphi^{-1})^i_r g^{rs}(\varphi^{-1})^k_s \cdot \varphi^a_k h_{ab}\varphi^b_j = (\varphi^{-1})^i_r g^{rs} h_{sb}\varphi^b_j = (\varphi^{-1})^i_r h^r_b \varphi^b_j.$$

(ii) Es gilt $\hat{X}_{,ij} = QX_{,ij}$. Wir erhalten

$$\hat{h}_{ij} = -\left\langle \hat{X}_{,ij}, \hat{\nu}\right\rangle = -\langle QX_{,ij}, Q\nu\rangle = -\langle X_{,ij}, \nu\rangle = h_{ij}.$$

Da wir in Theorem 6.5 bereits gesehen haben, dass $\hat{g}_{ij} = g_{ij}$ gilt, erhalten wir $\hat{h}^i_j = \hat{g}^{ik}\hat{h}_{kj} = g^{ik}h_{kj} = h^i_j$. □

Wir wollen noch eine Interpretation der zweiten Fundamentalform angeben, welche die Krümmung von Kurven auf der Fläche betrachtet.

Definition 7.11. Sei $\alpha : (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve mit $\operatorname{im}\alpha \subset M$, wobei M eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ sei. Sei $p := \alpha(0)$ und κ die Krümmung von α an p. Sei ν ein Normalenvektor von M an p und n der Normalenvektor von α an p. Wir bezeichnen dann

$$\kappa_n := \kappa\cos\vartheta := \kappa\langle n, \nu\rangle$$

als *Normalkrümmung* von α an p bezüglich ν.

Seien nun α und M wie in der Definition, wobei wir annehmen, dass α nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Wegen $\langle \nu\circ\alpha(s), \alpha'(s)\rangle = 0$ für alle $s \in (-1, 1)$ erhalten wir

$$\langle \nu\circ\alpha(s), \alpha''(s)\rangle = -\langle(\nu\circ\alpha)'(s), \alpha'(s)\rangle.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} A(\alpha'(0), \alpha'(0)) &= -\langle d\nu_p(\alpha'(0)), \alpha'(0)\rangle = -\langle(\nu\circ\alpha)'(0), \alpha'(0)\rangle \\ &= \langle \nu(p), \alpha''(0)\rangle = \langle \nu(p), \kappa n(p)\rangle = \kappa_n(p). \end{aligned}$$

Wir erhalten die folgende Aussage.

Theorem 7.12 (Meusnier)**.** *Sei M eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ mit Normale ν und sei $p \in M$. Alle Kurven auf M, welche denselben Tangentialvektor an p haben, haben dieselbe Normalkrümmung an p bezüglich ν.*

7.2. **Hauptkrümmungen und Krümmungsfunktionen.**

Definition 7.13. Seien g, B symmetrische Bilinearformen auf $\mathbb{R}^n$. Dann heißt $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ Eigenvektor von B bezüglich g zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, falls

$$\lambda g(\cdot, v) = B(\cdot, v)$$

oder, äquivalent dazu, $\lambda g(w, v) = B(w, v)$ für alle $w \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Definition 7.14 (Hauptkrümmungen)**.** Sei X eine C^2-Fläche mit Metrik g und zweiter Fundamentalform A. Dann heißen die Eigenwerte der zweiten Fundamentalform $A(x)$ bezüglich $g(x)$ *Hauptkrümmungen* von X in x.

In Koordinaten ist λ eine Hauptkrümmung, wenn es ein $\xi \neq 0$ mit

$$\lambda g_{ij}\xi^j = h_{ij}\xi^j$$

gibt.

Bemerkung 7.15. Die Hauptkrümmungen sind auf den Äquivalenzklassen von C^2-Flächen mit C^2-Umparametrisierungen wohldefiniert: Sei $\hat{X} = X \circ \varphi$. Aus $\lambda g_{ij}\xi^j = h_{ij}\xi^j$ folgt mit $\hat{\xi}^k := (\varphi^{-1})^k_i \xi^i$ nämlich

$$\lambda \hat{g}_{ij}\hat{\xi}^j = \lambda \varphi^a_i g_{ab} \varphi^b_j (\varphi^{-1})^j_k \xi^k = \lambda \varphi^a_i g_{ab}\xi^b = \varphi^a_i h_{ab}\xi^b = \varphi^a_i h_{ab}\varphi^b_j(\varphi^{-1})^j_k\xi^k = \hat{h}_{ij}\hat{\xi}^j,$$

da die Metrik und die zweite Fundamentalform dasselbe Transformationsverhalten haben.

Lemma 7.16. *Sei X eine C^2-Fläche mit Metrik g und zweiter Fundamentalform A. Dann besitzt A bezüglich g zwei bezüglich g orthogonale Eigenvektoren und zwei zugehörige (nicht notwendigerweise verschiedene) Hauptkrümmungen.*

Beweis. Wir wollen mit A und g auch die bezüglich der Standardbasis zugehörigen Matrizen bezeichnen. Da g und g^{-1} symmetrisch und positiv definit sind, gibt es Quadratwurzeln $\sqrt{g}$ und $\sqrt{g^{-1}}$. (Versuchen Sie nicht, das in konsistenter Weise mit oberen und unteren Indices aufzuschreiben.) Da $\sqrt{g^{-1}}A\sqrt{g^{-1}}$ symmetrisch ist, gibt es zwei bezüglich des Standardskalarproduktes orthogonale Eigenvektoren $\hat{\xi}, \hat{\zeta}$. Sei

$$\sqrt{g^{-1}}A\sqrt{g^{-1}}\hat{\xi} = \lambda\hat{\xi}.$$

Setze $\xi := \sqrt{g^{-1}}\hat{\xi}$. Dann gilt $\hat{\xi} = \sqrt{g}\xi$. Es folgt

$$A\xi = \lambda\sqrt{g}\sqrt{g}\xi = \lambda g\xi.$$

Mit $\hat{\zeta} = \sqrt{g}\zeta$ erhalten wir

$$\left\langle \hat{\xi}, \hat{\zeta} \right\rangle_{\mathbb{R}^2} = \langle \xi, \zeta\rangle_g.$$

Somit folgt die Behauptung. $\square$

Definition 7.17. Elementarsymmetrische Funktionen der Hauptkrümmungen (λ_i) sind wohldefiniert. Wir setzen

$$H := S_1((\lambda_i)_{1\le i\le 2}) = \lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}\left(\sqrt{g^{-1}}A\sqrt{g^{-1}}\right) = \operatorname{tr}\left(g^{-1}A\right) = h^i_i$$

und

$$\begin{aligned} K := {} & S_2((\lambda_i)) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det\left(\sqrt{g^{-1}}A\sqrt{g^{-1}}\right) \\ = {} & \det A \cdot \left(\det \sqrt{g^{-1}}\right)^2 = \det A \cdot \det\left(g^{-1}\right) = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}}. \end{aligned}$$

H heißt mittlere Krümmung, K Gaußkrümmung.

Bemerkung 7.18. Wählt man $-\nu$ statt ν als Normale, so ändert sich das Vorzeichen von h_{ij} und H, das von K bleibt unverändert.

Beispiel 7.19 (Hauptkrümmungen von Graphen)**.** Für Graphen gelten $h_{ij} = \frac{u_{ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}}$ und $g_{ij} = \delta_{ij} + u_i u_j$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} g^{ij} &= \delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2}, \\ H &= h^i_i = g^{ij} h_{ij} = \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}} \left(\delta^{ij} u_{ij} - \frac{u_{ij} u^i u^j}{1+|Du|^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}} \left(\Delta u - \frac{D^2 u \langle Du, Du \rangle}{1+|Du|^2} \right) \end{aligned}$$

und nach etwa zwei Zwischenschritten

$$= \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right)$$

mit

$$\operatorname{div}(\xi) \equiv \operatorname{div}\left(\left(\xi^i\right)\right) := \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} \quad \text{und} \quad \nabla u = \left(u^i\right)_{1\le i\le 2} = \left(\delta^{ij} u_j\right)_{1\le i\le 2}.$$

Für die Gaußkrümmung gilt

$$K = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}} = \frac{\det u_{ij}}{1+|Du|^2} \frac{1}{1+|Du|^2} = \frac{\det u_{ij}}{\left(1+|Du|^2\right)^2}.$$

Wir betrachten nun speziell rotationssymmetrische Graphen. Sei

$$X(x) = (x, u(x)) \equiv (x, \varphi(|x|)),$$

$x \in \Omega$, $\Omega = B_R(0) \setminus B_\rho(0)$, $0 \le \rho < R \le \infty$, mit $\varphi \in C^2$ und $\varphi'(0) = 0$ falls $\rho = 0$. Ohne die letzte Bedingung wäre $u(x) = \varphi(|x|)$ im Urspung weder in C^1 noch in C^2. Setze $r := |x|$. Es gilt

$$\begin{aligned} u_i(x) &= \varphi'(r) \frac{x_i}{|x|}, \\ u_{ij}(x) &= \varphi'(r) \frac{1}{|x|} \left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right) + \varphi''(r) \frac{x_i}{|x|} \frac{x_j}{|x|}, \\ |Du|^2 &= (\varphi')^2, \\ g_{ij} &= \delta_{ij} + u_i u_j = \delta_{ij} + (\varphi')^2 \frac{x_i}{|x|} \frac{x_j}{|x|}, \\ h_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{1+(\varphi')^2}} \left(\frac{\varphi'}{|x|} \left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right) + \varphi'' \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right). \end{aligned}$$

Eine gemeinsame Basis aus Eigenvektoren von g_{ij} und h_{ij} bezüglich δ_{ij} ist außerhalb des Ursprungs durch $\frac{x}{|x|}$ oder x und eine Basis von $\langle x \rangle^\perp$ gegeben. Für die Eigenwerte gilt

	x	$\langle x \rangle^\perp$
g_{ij}	$1+(\varphi')^2$	1
h_{ij}	$\frac{\varphi''}{\sqrt{1+(\varphi')^2}}$	$\frac{\varphi'}{r} \frac{1}{\sqrt{1+(\varphi')^2}}$

Als Hauptkrümmungen erhalten wir somit einmal $\frac{\varphi''}{(1+(\varphi')^2)^{3/2}}$ und sonst (hier auch einmal) $\frac{\varphi'}{r\sqrt{1+(\varphi')^2}}$.

Theorem 7.20 (Lokale Normalform von Flächen)**.** *Sei $\hat{X}\colon \hat{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^k-Fläche mit $k \geq 2$ und Normale $\hat{\nu}$. Dann gibt es zu $x_0 \in \hat{\Omega}$ eine Euklidische Bewegung $B : x \mapsto Qx + a$ mit $Q \in O(3)$ und $a \in \mathbb{R}^3$ sowie eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und einen Diffeomorphismus $\varphi\colon \Omega \to \varphi(\Omega) \subset \hat{\Omega}$ mit $\varphi(0) = x_0$ und ein $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$ mit $f(0) = 0$ und $Df(0) = 0$, so dass $X := B \circ \hat{X} \circ \varphi$ folgendes erfüllt:*

(i) $X(x) = (x, f(x))$ für alle $x \in \Omega$,

(ii) $f(x) = \frac{1}{2}\hat{\kappa}_1(x_0) \cdot \left(x^1\right)^2 + \frac{1}{2}\hat{\kappa}_2(x_0) \cdot \left(x^2\right)^2 + o\left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2\right)$,

wobei $\hat{\kappa}_i$ die Hauptkrümmungen von $\hat{X}$ in $x_0 \in \hat{\Omega}$ sind.

Beweis. Seien für $i = 1, 2$ die Vektoren $\hat{\xi}_i$ Eigenvektoren von $\hat{h}_{ij}$ bezüglich $\hat{g}_{ij}$ zu den Eigenwerten $\hat{\kappa}_i$ im Punkt x_0. (Im Falle $\hat{\kappa}_1(x_0) = \hat{\kappa}_2(x_0)$ seien $\hat{\xi}_1$ und $\hat{\xi}_2$ bezüglich $\hat{g}_{ij}$ orthogonal zueinander gewählt.) Dann bilden $\hat{\nu}(x_0)$, $d\hat{X}_{x_0}(\hat{\xi}_1)$ und $d\hat{X}_{x_0}(\hat{\xi}_2)$ nach Lemma 7.16 eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$. Somit gibt es eine Euklidische Bewegung B, die $\hat{X}(x_0)$ auf 0, $\hat{\nu}(x_0)$ auf $-e_3$ und $d\hat{X}_{x_0}(\hat{\xi}_i)$ auf $\pm e_i$ (Vorzeichen beliebig), $i = 1, 2$, abbildet (eine Abbildung auf beliebige orthogonale Vektoren in dieser Ebene würde ebenfalls ausreichen). Sei $\pi_{23}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf $\langle e_3\rangle^\perp$, wobei wir diesen Raum mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Da $\hat{X}$ regulär ist, ist $\pi_{23} \circ B \circ \hat{X}\colon \hat{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ ein lokaler Diffeomorphismus von einer Umgebung von x_0 auf eine Umgebung von 0. Definiere nach Einschränkung auf solche Umgebungen $\psi := \left(\pi_{23} \circ B \circ \hat{X}|_{\ldots}\right)^{-1}$. Dann hat $Y := B \circ \hat{X} \circ \psi$ die Form $Y(x) = (x, F(x))$. $F(0) = 0$ gilt nach Konstruktion und wegen $B\hat{\nu}(x_0) = -e_3$ ist $DF(0) = 0$.

Einfacher als nachzurechnen, dass (ii) erfüllt ist, ist nun folgendes Vorgehen: F erfüllt $F(0) = 0$, $DF(0) = 0$ und $D^2F(0)$ ist eine Matrix mit Eigenwerten $\hat{\kappa}_1(x_0)$ und $\hat{\kappa}_2(x_0)$, da weder φ noch B die Hauptkrümmungen verändern und $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ gilt. Durch eine Rotation R in $\mathbb{R}^2$ können wir $D^2(F \circ R)$ auf die gewünschte Diagonalgestalt bringen. Also ist $X := B \circ \hat{X} \circ \varphi$ mit $\varphi := \psi \circ R$ wie gewünscht und $f := F \circ R$ die in (ii) gesuchte Funktion. □

Korollar 7.21. *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit Gaußscher Krümmung K bezüglich einer Normalen ν. Sei $x_0 \in \Omega$. Dann gilt*

(i) Ist $K(x_0) > 0$, so gibt es eine Umgebung U von x_0 mit $\langle X(x) - X(x_0), \nu(x_0)\rangle > 0$ für alle $x \in U \setminus \{x_0\}$ oder $\langle X(x) - X(x_0), \nu(x_0)\rangle < 0$ für alle $x \in U \setminus \{x_0\}$, d. h. $\operatorname{im} X$ liegt lokal auf einer Seite der affinen Tangentialebene in x_0.

(ii) Ist $K(x_0) < 0$, so gibt es in jeder Umgebung U von x_0 Punkte $x_\pm \in U$ mit

$$\langle X(x_+) - X(x_0), \nu(x_0)\rangle > 0 \quad \text{und} \quad \langle X(x_-) - X(x_0), \nu(x_0)\rangle < 0,$$

d. h. $\operatorname{im} X$ liegt selbst lokal auf beiden Seiten der affinen Tangentialebene in x_0.

Beweis. Benutze die Normalform für Flächen. □

Literatur

1. Roland Gunesch, *Vorlesung Differentialgeometrie*, 2012/2013, Skript zur Vorlesung.
2. Ernst Kuwert, *Elementare Differentialgeometrie*, 2006, Skript zur Vorlesung.
3. Oliver Schnürer, *Elementare Differentialgeometrie*, 2011/2012, Skript zur Vorlesung.
4. Mike Spivak, *A comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume II*, 1979, Verlag Publish or Perish.

Matthias Makowski, Fachbereich Mathematik und Statistik, Universität Konstanz, 78457 Konstanz, Germany

E-mail address: Matthias.Makowski@uni-konstanz.de